

*Prof. Janusz Mroczka
Doktorem Honoris Causa
Akademii Górniczo-Hutniczej
im. Stanisława Staszica
w Krakowie*

Kraków, 8 grudnia 2021 r.

ISBN 978-83-66727-56-4

Wydawca: Centrum Komunikacji i Marketingu AGH

Korekta: Katarzyna Wrzosek

Skład: Marianna Cielecka

www.agh.edu.pl





Spis treści

Prof. dr hab. inż. Jerzy Lis

Rektor Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

Przemówienie 5

Dr hab. inż. Ryszard Sroka, prof. AGH

Dziekan Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki

i Inżynierii Biomedycznej

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wystąpienie 7

Prof. dr hab. inż. Janusz Gajda

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Laudacja promotorska 11

Prof. dr hab. inż. Piotr Kisała

Politechnika Lubelska

Recenzja 21

płk prof. dr hab. inż. Przemysław Wachulak

Wojskowa Akademia Techniczna im. Jarosława Dąbrowskiego

Recenzja 37

Prof. dr hab. inż. Janusz Mroczka

Podziękowanie 57

Prof. dr hab. inż. Janusz Mroczka

Matematyczne uwarunkowania problemu odwrotnego w pośrednich

pomiarach rozkładu wielkości cząstek układów dyspersyjnych 61

PHC



Przemówienie Rektora Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

**Drogi Doktorze Honorowy,
Wysoki Senacie,
Szanowni Goście,**

witam serdecznie na uroczystości nadania najwyższej godności akademickiej – tytułu Doktora Honoris Causa Akademii Górniczo-Hutniczej – Panu Profesorowi Januszowi Mrocze.

To wyjątkowe wydarzenie w środowisku akademickim. Godność doktora honoris causa jest najwyższym wyróżnieniem, jakie uczelnia może nadać osobom wybitnym – posiadającym szczególne osiągnięcia w obszarze nauki, odznaczającym się wzorową postawą moralną, zasłużonym w rozwoju kadry i działalności organizacyjnej – które swoją pracą na rzecz społeczności akademickiej wyznaczały pozycję naszej uczelni na mapie ośrodków akademickich w kraju i za granicą.

Profesor Janusz Mrocza to wybitny specjalista w obszarze elektroniki i metrologii. W swojej karierze naukowej otrzymał liczne tytuły oraz wyróżnienia. Jest laureatem wielu nagród, między innymi: Nagrody Ministerstwa Edukacji Narodowej, Nagrody Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego czy Nagrody Prezesa Polskiej Akademii Nauk, a także Komandorem, Oficerem, Kawalerem Orderu Odrodzenia Polski. Otrzymał Złoty, Srebrny i Brązowy Krzyż Zasługi oraz Medal Komisji Edukacji Narodowej. Profesor Janusz Mrocza jest również doktorem honoris causa Politechniki Lubelskiej, Politechniki Opolskiej, Politechniki Gdańskiej i Wojskowej Akademii

Technicznej. Jest autorem blisko 450 artykułów naukowych, cytowanych ponad 2300 razy.

Profesor Janusz Mroczka to postać znana i niezwykle ceniona na całym świecie. Warto podkreślić, że Pan Profesor pozostaje w stałym kontakcie z naszą uczelnią, a jego prace i metody miały istotny wpływ na rozwój badań prowadzonych w AGH, szczególnie na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej.

Szanowny Doktorze Honorowy,

gratuluje wspaniałej i bogatej kariery. Życzę, aby Pana dorobek stanowił źródło inspiracji dla młodych naukowców z naszej uczelni i naszego kraju. Nadanie Panu godności doktora honoris causa jest dowodem uznania dla Pańskich wybitnych osiągnięć i stanowi wielki zaszczyt dla Akademii Górniczo-Hutniczej.



Dr hab. inż. Ryszard Sroka

Dziekan Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie



Tytuł Doktora Honoris Causa AGH dla prof. dr. hab. inż. Janusza Mroczy

**Magnificencjo Rektorze,
Wysoki Senacie,
Wielce Szanowny Doktorze Honorowy,
Dostojni Goście,
Szanowni Państwo,**

jest dla mnie ogromnym zaszczytem, że jako dziekan Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej mogłem przygotować, a dzisiaj przedstawić dostojnemu gremium, uzasadnienie do wniosku Rady Wydziału o nadanie Panu Profesorowi Januszowi Mroczy tytułu Doktora Honoris Causa Akademii Górniczo-Hutniczej.

Nadanie przez senat uczelni tytułu doktora honoris causa stanowi symboliczny akt przyjęcia honorowanego do jej społeczności. Uroczystość związana z nadaniem tej godności jest zawsze wielkim świętem dla uczelni. Dzisiaj świętuje Akademia Górniczo-Hutnicza, w której murach zebraliśmy się, aby przyjąć do naszego grona prof. Janusza Mroczy. Jest to także wielkie i ważne wydarzenie dla Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej, który wnioskował o nadanie Profesorowi tego zaszczytnego tytułu.

Procedurę zapoczątkowała Rada Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej, podejmując uchwałę nr 83 z dnia 23 maja 2019 r. o wystąpieniu w tej sprawie do Rektora i Senatu AGH. Skierowałem zatem do Jego Magnificencji

Rektora stosowną prośbę wraz z pełną dokumentacją. Pan Rektor zechciał przychylić się do mojej prośby i rozpoczęła się procedura, której pierwszym krokiem było przyjęcie przez Senat AGH uchwały nr 14/2021 z dnia 3 marca 2021 r. W uchwale tej Senat postanowił wyznaczyć Promotora postępowania – prof. dr. hab. inż. Janusza Gajdę, a także zwrócił się do senatów Politechniki Lubelskiej i Wojskowej Akademii Technicznej z prośbą o zaopiniowanie wniosku.

Senat Politechniki Lubelskiej po zapoznaniu się z wysoce pozytywną recenzją prof. dr. hab. inż. Piotra Kisały w dniu 27 maja 2021 r. uchwałą nr 23/2021/V postanowił pozytywnie zaopiniować i poprzeć wniosek Senatu Akademii Górniczo-Hutniczej o nadanie prof. Januszowi Mrocze godności doktora honoris causa. Także Senat Wojskowej Akademii Technicznej po zapoznaniu się z recenzją przygotowaną przez płk. prof. dr. hab. inż. Przemysława Wachulaka, w dniu 27 maja 2021 r. uchwałą nr 44/WAT/2021 postanowił pozytywnie zaopiniować i poprzeć wniosek Senatu AGH.

W związku z tak pozytywnymi opiniami Recenzentów i poparciem senatów Politechniki Lubelskiej oraz Wojskowej Akademii Technicznej, Senat AGH na posiedzeniu w dniu 30 czerwca 2021 r., uchwałą nr 79/2021 postanowił o nadaniu najwyższej godności akademickiej prof. Januszowi Mrocze w uznaniu wybitnych osiągnięć naukowych w obszarze metrologii, a w szczególności matematycznych uwarunkowań problemu odwrotnego w złożonych pomiarach pośrednich, które stały się płaszczyzną wieloletniej, bliskiej współpracy z Akademią Górniczo-Hutniczą, promując jej kadrę naukową i dydaktyczną w tym obszarze wiedzy, jednocześnie rozślawiając jej merytoryczne osiągnięcia w kraju i za granicą.

Prof. Janusz Mrocza urodził się w 1952 r. w Dębicy, gdzie ukończył Liceum Ogólnokształcące w 1971 r. i podjął studia na Wydziale Elektroniki Politechniki Wrocławskiej, które ukończył w 1976 r. Swoją bogatą karierę naukową związał praktycznie całkowicie z Politechniką Wrocławską. Stopień naukowy doktora nauk technicznych uzyskał w 1980 r. w Instytucie Metrologii Elektrycznej, zaś w 1991 r. uzyskał stopień naukowy doktora habilitowanego. Lata 80.

i 90. były tym okresem, który ukształtował zainteresowania naukowe Pana Profesora. Tytuł naukowy profesora uzyskał już w 1996 r., a więc niebywale szybko, biorąc pod uwagę trudną i wymagającą dziedzinę wiedzy, jaką reprezentuje. W 1999 r. powierzono mu stanowisko profesora zwyczajnego na Politechnice Wrocławskiej. W latach 1991–1996 pełnił funkcję dyrektora Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej, a w 1998 r. założył Katedrę Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej, którą kieruje do dzisiaj. W latach 1999–2005 prof. Janusz Mrocčka pełnił zaszczytną funkcję senatora Senatu Politechniki Wrocławskiej. Aktywnie uczestniczy także w pracach wielu krajowych i międzynarodowych organizacji i komisji. Od 1993 r. jest członkiem Komitetu Metrologii i Aparatury Pomiarowej PAN; w latach 2001–2007 był wiceprzewodniczącym, a w latach 2007–2015 przewodniczącym Komitetu, który w 2014 r. został oceniony przez Prezydium PAN jako najlepszy komitet naukowy w Polskiej Akademii Nauk. W 2010 r. został powołany na członka korespondenta Polskiej Akademii Nauk. W latach 2013–2020 był członkiem Centralnej Komisji ds. Stopni i Tytułów.

Jest doktorem honoris causa czterech polskich Uczelni, a mianowicie: Politechniki Lubelskiej, Politechniki Opolskiej, Wojskowej Akademii Technicznej im. Jarosława Dąbrowskiego oraz Politechniki Gdańskiej.

Działalność naukowa prof. Janusza Mrocčki związana jest z elektroniką i metrologią, a jego zainteresowania naukowe dotyczą między innymi: metodologii procesu poznawczego, algorytmizacji problemu odwrotnego, pomiarów pośrednich źle uwarunkowanych numerycznie, analizy spektralnej i polaryzacyjnej promieniowania rozproszonego, fuzji danych pomiarowych z wykorzystaniem deterministycznych i stochastycznych metod przetwarzania, a także wykorzystania reprezentacji czasowo-częstotliwościowych sygnałów w przetwarzaniu danych pomiarowych.

Prof. Janusz Mrocčka jest autorem ponad 440 publikacji (w tym ponad 140 z listy filadelfijskiej), autorem i współautorem 13 książek,

8 patentów i wielu wdrożeń. Niezwykle aktywny jest także na polu pozyskiwania i realizacji projektów badawczych. Był realizatorem ponad 30 grantów (w tym 7 międzynarodowych). Wniósł ogromny wkład w rozwój kadry naukowej. Jego dorobek w tym zakresie obejmuje trzy recenzje doktoratów honoris causa, 58 recenzji wniosków profesorskich, 57 recenzji w przewodach habilitacyjnych, 22 recenzji rozpraw doktorskich oraz 56-krotne pełnienie funkcji przewodniczącego komisji habilitacyjnej.

Duża liczba nagród i odznaczeń, jakie zostały Profesorowi przyznane, potwierdza fakt, że jego osiągnięcia są zauważane i doceniane. Wśród odznaczeń można wyliczyć: Medal Komisji Edukacji Narodowej, Brązowy, Srebrny i Złoty Krzyż Zasługi, Krzyż Kawalerski, Oficerski i Komandorski Orderu Odrodzenia Polski i wiele innych, w tym branżowych.

To, o czym wspomniałem, to zaledwie „wierzchołek góry lodowej” w bogatym życiorysie naukowym prof. Janusza Mroczi. O pasjach, zainteresowaniach i całokształcie dorobku zarówno badawczego, jak i czysto ludzkiego mówić będzie z całą pewnością w swojej laudacji Pan profesor Janusz Gajda.

Ja natomiast w imieniu Kolegium Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej pragnę złożyć podziękowania Senatowi AGH za podjęcie uchwały nadającej prof. Januszowi Mrocze godność doktora honoris causa. Podziękowania kieruję również do Jego Magnificencji Rektora, prof. Jerzego Lisa za osobiste zaangażowanie i wsparcie inicjatywy, która zaowocowała dzisiejszą uroczystością.

Bardzo serdecznie dziękuję senatom Politechniki Lubelskiej i Wojskowej Akademii Technicznej oraz powołanym przez te uczelnie Recenzentom, prof. Piotrowi Kisale i prof. Przemysławowi Wachulakowi, za niezwykle merytoryczne opinie wspierające uchwały ich senatów.

Profesorowi Januszowi Mrocze, Doktorowi Honoris Causa, dziękuję za uczynienie nam zaszczytu i przyjęcie tej godności oraz włączenie się w społeczność naszej Almae Matris. Szanowny Panie



Profesorze, serdecznie gratuluję nominacji i witam w gronie społeczności AGH. W jej imieniu, a szczególnie w imieniu społeczności naszego Wydziału, której przez szereg lat służył Pan swoją wiedzą, chęcią do współpracy, dobrymi radami, a także wyważonymi i sprawiedliwymi recenzjami, składam Panu Profesorowi najlepsze życzenia dalszych sukcesów w życiu zawodowym i osobistym, zdrowia i wszelkiej pomyślności.

DH



Laudacja promotorska

**Magnificencjo Rektorze,
Wysoki Senacie,
Panie Dziekanie,
Wielce Dostojny Panie Profesorze,**

przypadł mi niewątpliwy zaszczyt wygłoszenia laudacji podczas uroczystego posiedzenia Senatu Akademii Górniczo-Hutniczej, poświęconego nadaniu tytułu doktora honoris causa prof. Januszowi Mrocze, członkowi korespondentowi Polskiej Akademii Nauk, profesorowi magnusowi Politechniki Wrocławskiej. Tytuł ten jest nadawany w uznaniu zasług Profesora dla całego środowiska naukowego, jak również dla Akademii Górniczo-Hutniczej.

Godność doktora honoris causa to najwyższe wyróżnienie, jakie może przyznać uniwersytet. Jest ona nadawana osobom wybitnym – za zasługi i dla zaszczytu. Zaszczyt jest obustronny i przypada zarówno osobie wyróżnionej, jak i uczelni, która tę godność nadaje. Jestem jednak głęboko przekonany, że tytuł doktora honoris causa pełni jeszcze jedną, równie ważną rolę. Wskazuje mianowicie osobę, która dla nas wszystkich przynależących do wspólnoty akademickiej może stanowić najwyższej jakości wzorzec postaw obowiązujących w procesach zdobywania i przekazywania wiedzy.

Prof. Janusz Mrocza jest metrologiem, a pojęcie wzorca jest jednym z podstawowych pojęć używanych w metrologii. Wzorzec powinien charakteryzować się pewnymi cechami, do których należą niezmienność w czasie oraz mała i znana niepewność. Po wielu latach znajomości mogę stwierdzić, że obie te cechy wyróżniają również Profesora. Niezmienność dotyczy przede wszystkim jego

standardów etycznych, przestrzeganych podczas prowadzenia badań, zajęć dydaktycznych, jak również wtedy, gdy w roli recenzenta ocenia dorobek kandydatów do awansu naukowego. Mała niepewność w odniesieniu do osoby Profesora oznacza przewidywalność jego postawy w każdej, nawet najtrudniejszej, sytuacji życiowej lub zawodowej. Można być pewnym, że decyzje, oceny i opinie wygłaszane przez Profesora będą zawsze oparte na dogłębnej znajomości zagadnienia i zgodne z najwyższymi standardami etycznymi.

Działalność naukowa Profesora zawiera się w obszarze elektroniki i metrologii. Jego zainteresowania naukowe dotyczą metodologii procesu poznawczego, algorytmizacji problemu odwrotnego, pomiarów pośrednich źle uwarunkowanych numerycznie, analizy spektralnej i polaryzacyjnej promieniowania rozproszonego w opisie właściwości układów dyspersyjnych, metodologii łączenia danych pomiarowych o różnej przestrzennej rozdzielczości z wykorzystaniem deterministycznych i stochastycznych metod przetwarzania, wykorzystania reprezentacji czasowo-częstotliwościowych sygnałów w przetwarzaniu danych pomiarowych czy wreszcie opracowania metody momentów w analizie układów dyspersyjnych.

Dorobek naukowy prof. Janusza Mroczyki przedstawili i ocenili opiniodawcy powołani w tym przewodzie: prof. Piotr Kisała z Politechniki Lubelskiej oraz prof. Przemysław Wachulak z Wojskowej Akademii Technicznej. W swojej laudacji skupię się więc na przedstawieniu osoby Profesora, jego szczególnych cech charakteru, które obok wybitnych osiągnięć naukowych dodatkowo uzasadniają wyróżnienie go tą najwyższą godnością akademicką.

Niemiecki filozof Karl Jaspers w swojej książce zatytułowanej *Idea uniwersytetu*, wydanej po raz pierwszy w Berlinie w 1923 r., wymienił pięć filarów, na których opiera się tożsamość uniwersytetu. Według Jaspersa są nimi: poszukiwanie prawdy, wspólnotowość, bezinteresowność, zaufanie oraz wolność. Według tych wskazań można również oceniać postawę każdego badacza i naukowca. W przypadku prof. Janusza Mroczyki taka ocena wypada jednoznacznie pozytywnie.

Prof. Janusza Mroczkę znam od prawie 30 lat. W kontaktach osobistych z Profesorem szczególną uwagę zwraca przestrzeganie przez niego wysokich standardów moralnych. Prawdomówność, odpowiedzialność, niezależność, wolność, niepodatność na naciski, bezwzględna zgodność słowa z czynem uczyniły go wzorcem etycznym w środowisku akademickim. Profesor stara się zaszcześcić te cnoty również swoim współpracownikom i wychowankom. Jego relacje ze studentami i współpracownikami charakteryzują tolerancja dla poglądów, szacunek, umiejętność dostrzegania uzdolnień i talentów oraz wspieranie ich rozwoju, wyrozumiałość dla błędów i słabości, życzliwość i pełna gotowość do pomocy, gdy tylko jest taka potrzeba. Wkład prof. Janusza Mroczki w sposób oceny ludzkich dokonań to fenomen ukazujący, jak na podstawie ocenianego dorobku kandydatów do awansu można wywnioskować, co w osobowościach, w charakterach, we wnętrzu tych osób jest wielkie i najcenniejsze. Profesor twierdzi, że właśnie tam widać ich prawdziwy charakter i wewnętrzną intelektualną sprawczość. Jego zaangażowanie i bezgraniczna wiara w sprawiedliwość oraz wartości pozwoliły mu ustanowić standardy oceny w postępowaniach kwalifikacyjnych. Jest przeciwnikiem szybkich, pochopnych ocen. Twierdzi, że „czas prawdziwej oceny jest niekiedy dłuższy niż jedno życie”. Uważa, że należy oceniać to, co oceniany stworzył, czyli rzeczywiste dzieło, a nie fakt jego tworzenia, w którym – jak powiada – można trwać całe życie i nic nie stworzyć. Jego ośmioletni czas bycia członkiem Centralnej Komisji do Spraw Stopni i Tytułów był miejscem i płaszczyzną intelektualnego oddziaływania i propagowania wypracowanego przez wiele lat sposobu oceny dorobku naukowego. W licznych recenzjach dokonań naukowych kandydatów wspinających się po szczeblach kariery akademickiej Profesor pokazał, jak można zachować niezależność, solidność, uczciwość w określaniu wartości dorobku drugiego człowieka, oceniając go w sposób rzetelny i przyjazny, ale również krytyczny i bezstronny. Taka właśnie forma recenzji stała się wzorcem do naśladowania i ukształtowała liczne grono młodych uczonych, obecnych recenzentów.

Przez dbałość o nieustanne zachowywanie wysokich norm etycznych oraz zaangażowanie w obronę sprawiedliwości i wartości moralnych Profesor stał się legendą w świecie nauk technicznych. Jego bezkompromisowa postawa nie zawsze spotykała się z uznaniem i zrozumieniem środowiska. Pomimo to odważnie i uporczywie pracował i nadal pracuje na rzecz poszanowania autentycznych wartości. Jakże prawdziwe w tym kontekście są słowa wypowiedziane przez Tadeusza Kantora, polskiego malarza i reżysera, scenografa i teoretyka sztuki: „Nie można być ciągle na fali – trzeba być falą”. Ze względu na swoje poglądy i postawę prof. Janusz Mrocza rzadko był na fali, ale często sam był falą.

Prof. Andrzej Meterka w swojej recenzji opracowanej w innym czasie i dla potrzeb innego postępowania trafnie scharakteryzował Profesora: „Ma ogromną, historyczną i bieżącą, wiedzę na temat działalności naukowej i zawodowej kilkuset badaczy uprawiających dyscyplinę elektronika i związane z elektroniką obszary teorii i praktyki. Łatwo nawiązuje i rozwija nowe kontakty, jest przyjazny, otwarty i uważny. Píše wnikliwe, a jednocześnie błyskotliwe recenzje dysertacji naukowych i dorobku uczonych. Umie przedstawić krytykę w sposób prawdziwie życzliwy. Z dużą intuicją wyczuwa potencjał autora ocenianych dzieł i podsuwa nowe kierunki twórczych poszukiwań. Nakreśla perspektywę sukcesu i zachęca do szukania własnej drogi zawodowej, której przeciwstawia opcję powielania drogi mistrza. Jest w wypełnianiu tego dzieła wybitny”.

Prof. Janusz Mrocza należy do tego pokolenia, którego życie osobiste i zawodowe przypadło na wyjątkowo trudny czas, w którym narzucono realia obcego systemu komunistycznego. On, wychowany w rodzinie z tradycjami ustroju wiejsko-dworkowego w atmosferze ukształtowanej przez dzieła Młodej Polski i postromantyczne echa, w żaden sposób nie mógł się odnaleźć w komunistycznej rzeczywistości, a zarazem był przekonany, że aby przetrwać, nie wystarczy żyć w ukryciu, w stanie duchowej emigracji. Obdarowany szczególną kreatywnością, pełen zapału, poszukujący coraz to nowych dróg realizacji siebie, zauważał rozdział między moralnością prywatną

a publiczną. Ten fakt oraz jego życiowa otwartość ułatwiły mu stonowanie od licznej wówczas grupy, w której dominowały bierność, odtwórczość, nieufność, zamknięcie i niewiara we własne siły. W ten sposób znalazł się poza tzw. straconym pokoleniem, które zawsze eksponowało swoiste rozczarowanie, poczucie krzywdy i wiecznego niezadowolenia. Jest zwolennikiem „odbrązowiania” ludzi zasłużonych, wyniesionych przez ideologiczne struktury za chęć tylko bycia, trwania, a niekiedy tylko poprawiania własnego bytu materialnego. Zaradzić temu, jak twierdzi Profesor, może jedynie zmiana mentalności społecznej, a dokonać tego mogą młodsze pokolenia. Dlatego, jak mówi, należy wszelkimi siłami im pomagać i poprzeczkę wymagań merytorycznych oraz etycznych ustawiać możliwie wysoko. Te pokolenia winny zmienić zasadę „*plus vis quam ratio*” na tę, która bliska jest profesorowi Mrocze: „*plus ratio quam vis*”. Znamienne są słowa Profesora zamieszczone w jednym z jego dzieł: „To, co przemienęło, nie powraca już nigdy. Z pokorą musimy akceptować upływający czas i nasze w nim przemijanie, słabości ducha i ciała, ludzkie niedostatki. Stąd epilogiem nie mogą być tu nakazy, pouczenia, rady i opinie. Dzieje ludzkie to nic innego jak wymuszona pokoleniowa wymiana, gdzie wartością i nieodzownym elementem staje się ludzka pamięć. Kończąc, dedykuję wszystkim utwór-apel Adama Asnyka z 1880 r. *Do młodych*, wytyczający kierunki działania, szukania prawdy według własnego pomysłu, budowania przyszłości i realizacji własnych marzeń, szanując dokonania swoich poprzedników”. To przykład formy i subtelności metod, jakimi Profesor dociera do wnętrza swoich młodych wychowanków, tym samym dopełniając, nieznane mu w pełni, ich *ego*.

W dokonywanej samoistnie pokoleniowej zmianie na uniwersytetach należy, jak uważa prof. Janusz Mroczka, „pozostawić młodym pokoleniom coś do przemyślenia. Stawianie na młodych to proaktywny sposób tworzenia nowego społeczeństwa, opartego na służeniu drugiemu, dzieleniu się z drugim, społeczeństwa, w którym bycie razem jest wartością nadrzędną względem posiadania więcej. Upływający czas zmienia każdego z nas. Doświadczenia

nasze ukształtowane w minionych latach nie mogą być jednak zapomniane”.

Przytaczam fragmenty różnych wypowiedzi i wystąpień prof. Janusza Mroczi, aby ukazać jego wkład w kształtowanie i wychowanie młodych pokoleń. Profesor wyzwała w swoich wychowankach wrażliwość aksjologiczną, przekazuje im doświadczenie życiowe, wykształca w nich jasność spojrzenia i myśli, a w szczególności obok spokojnej kontemplacji prawdy – niepokój w jej poszukiwaniu.

W tym kontekście znowu przychodzi na myśl odniesienie do idei uniwersytetu przedstawionej przez Karla Jaspersa. Formowanie lub inaczej mówiąc wychowywanie człowieczeństwa uważał on za najważniejszy element misji wypełnianej przez uniwersytet, a równocześnie za podstawowe uzasadnienie jego istnienia.

Charakterystyczną cechą twórczej aktywności wybitnych uczonych jest fakt nierozłącznej więzi z filozoficzną refleksją nad sensem i istotą poznania, a w szczególności metodologicznych poczynąń w dziedzinie wiedzy, w której pracują. Aby lepiej scharakteryzować sylwetkę profesora Mroczi jako nauczyciela i uczonego, posłużę się jego słowami zaczerpniętymi ze wstępu do dziesiątego tomu serii *Problemy metrologii elektronicznej i fotonicznej* redagowanej przez Profesora: „Kiedy w 2008 roku składałem do druku pierwszą książkę pod tytułem *Problemy metrologii elektronicznej i fotonicznej*, przyświecał mi cel upamiętnienia powstania z mojej inicjatywy pierwszej Katedry na Politechnice Wrocławskiej, po 1968 roku. Było to w roku 1998, trzydzieści lat po wydarzeniach marca 1968 roku, kiedy to w miejsce istniejących wówczas na Politechnice Wrocławskiej katedr powołane zostały instytuty. Ten fakt opisywany mi przez moich mentorów i wychowawców tłumaczyłem sobie słabością przestrzeni moralnej, deficytem kapitału moralnego. Rozczytany w *Dziennikach* Kisiela, szybko zauważyłem rozziew pomiędzy moralnością prywatną a publiczną, jak również moją indywidualną odrębność od grupy ludzi dzierżawiących swoje sumienie. W kolejnym 2009 roku podjąłem decyzję, aby wydać kolejną książkę, ale już jako cykliczną serię. Uważałem, że po dwudziestu latach traumy transformacyjnej,

szoku po gwałtownej i radykalnej zmianie ustrojowej w roku 1989, wytrąceni z utartych ścieżek życia, dokonujących rekonstrukcji codziennych reguł egzystencji na uczelni, ludzie nauki chętnie podejmą trud publikowania obszernych prac w tym cyklu książkowym”. Ta inicjatywa Profesora przyniosła wymierny efekt; wielu autorów publikujących swoje prace w tej serii pokonało kolejny stopień awansu naukowego. Wzbudziło to zasłużone uznanie i szacunek w środowisku akademickim, o czym świadczą przyznane mu liczne wyróżnienia oraz cztery doktoraty honoris causa.

Niezmienna jest również przychylność i życzliwość prof. Janusza Mroczi dla spraw dotyczących Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. Związki Profesora z Akademią trwają już ponad 20 lat. W tym okresie podejmował on liczne działania na rzecz rozwoju naukowego uczelni, jej promocji w środowisku krajowym oraz rozwoju młodej kadry naukowej. W szczególności Profesor przyczynił się w sposób istotny do:

- stworzenia korzystnych warunków do dalszego rozwoju naukowego Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej, poprzez sprawne przeprowadzenie procesu opiniowania wniosków o przyznanie wydziałowi uprawnień do nadawania stopnia doktora i doktora habilitowanego w dyscyplinie elektronika;
- promowania uczelni w krajowym i zagranicznym środowisku naukowym poprzez wspieranie merytoryczne i udział w komitetach naukowych konferencji organizowanych przez Wydział EAIiB. Łącznie we współpracy z Profesorem zostały zorganizowane 32 konferencje;
- rozwoju kadr poprzez udział w procesie awansowania naukowego wielu pracowników AGH.

Powyższe fakty pokazują, że prof. Janusz Mrocza legitymuje się wybitną twórczością naukową i zasłużył się dla rozwoju nauki i wychowania młodych pokoleń uczonych. Tym, co tworzy, w pełni wkomponowuje się w dewizę Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica: „*Labore creata, labori et scientiae servio*”.

W ponad 100-letniej historii Akademii Górniczo-Hutniczej godnością doktora honoris causa zostało wyróżnionych ponad stu wybitnych uczonych, polityków, twórców kultury. Wśród znamiennych postaci w tym panteonie są Wojciech Korfanty, Ignacy Mościcki, Walery Goetel, Tadeusz Sendzimir, Michał Heller, Wiesław Ochman oraz najwybitniejszy Polak święty Jan Paweł II. Na mocy decyzji Senatu Akademii Górniczo-Hutniczej dzisiaj dołącza do tego grona Profesor Janusz Mroczka, którego obdarzamy najwyższą godnością naszej Akademii.

Kraków, 28 maja 2021 r.





Recenzja
o dorobku naukowym, osiągnięciach i zasługach
Prof. dr. hab. inż. Janusza Mroczi,
członka korespondenta PAN
Kandydata do tytułu doktora Honoris Causa
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wprowadzenie

Niniejsza opinia w sprawie nadania tytułu doktora *honoris causa* Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie Profesorowi Januszowi Mrocze wykonana została w związku z wnioskiem Senatu Akademii. Zawiera ona informacje o najważniejszych osiągnięciach w pracy naukowo-badawczej Kandydata do tego zaszczytnego tytułu honorowego, opisując Jego wkład wniesiony w ramach współpracy z innymi Uczelniami, ze szczególnym uwzględnieniem roli Profesora Janusza Mroczi w rozwój Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie.

Tytuł doktora *honoris causa* jest nadawany przez uczelnie osobom szczególnie zasłużonym dla nauki i kultury, osobom o wysokim statusie społecznym lub naukowym. Przyznanie godności doktora honorowego to dowód uznania środowiska akademickiego za wszechstronny wkład w rozwój badanej dziedziny, zarówno pod względem naukowym, jak i organizacyjnym. Prof. Janusz Mrocza, członek korespondent Polskiej Akademii Nauk, profesor Politechniki Wrocławskiej, doktor *honoris causa* czterech uczelni to mentor i wzór do naśladowania dla wielu uczonych, autorytet naukowy, który pracowitością i wytrwałością motywuje innych. Jest On wybitnym

przedstawicielem nauki i strażnikiem zasad moralnych, cieszącym się powszechnym szacunkiem, nieprzypadkowo wybranym do otrzymania najwyższego tytułu nadawanego przez Uczelnię wyższą.

Czuję się zaszczycony pisząc opinię o dorobku, osiągnięciach i zasługach Profesora Janusza Mroczyki w postępowaniu zmierzającym do nadania Mu tytułu doktora *honoris causa* przez Akademię Górniczo-Hutniczą im. Stanisława Staszica w Krakowie. Jest to duże wyzwanie, gdyż próba opisu dorobku nagromadzonego w tak aktywnym życiu naukowym Profesora Janusza Mroczyki w krótkiej recenzji wydaje się trudna. Niemniej jednak fakt, że tak wybitny uczony część aktywności zawodowej poświęcił współpracy z Akademią Górniczo-Hutniczą, zasługuje na szczególne podkreślenie w niniejszej opinii.

Zwyczaj obowiązujący przy pisaniu opinii dotyczącej nadania tytułu doktora *honoris causa* nakazuje jej rozpoczęcie od podania najważniejszych momentów w życiorysie Kandydata.

1. Sylwetka Kandydata

Prof. dr hab. inż. Janusz Mrocza urodził się w Dębicy 27 kwietnia 1952 roku. Po skończeniu edukacji w I Liceum Ogólnokształcącym w Dębicy, w roku 1971 rozpoczął studia na Wydziale Elektroniki Politechniki Wrocławskiej. W roku 1976 uzyskał **tytuł magistra**, broniąc pracę pt. *Filtr adaptacyjny dolnoprzepustowy do tłumienia sygnałów zakłócających w przyrządach tablicowych*. W roku 1980 obronił na Politechnice Wrocławskiej pracę doktorską pt. *Zagadnienie pomiaru mętności wody oraz wielkości cząstek roztworów koloidalnych za pomocą światła rozproszonego*, uzyskując **stopień doktora** nauk technicznych. W roku 1991 na podstawie monografii pt. *Metrologiczne problemy wykorzystywania światła rozproszonego do badań rozkładu wielkości cząstek w roztworach dyspersyjnych* uzyskał **stopień doktora habilitowanego**. Był to ważny okres w karierze Pana Profesora, również ze względu na objęcie przez Niego funkcji dyrektora Instytutu Metrologii Elektrycznej na Politechnice Wrocławskiej. Już w roku 1996 uzyskał **tytuł profesora** i od tego czasu pracuje w swojej *Alma Mater* na stanowisku profesora zwyczajnego.



Rok 1998 przynosi kolejny rozwój i zmiany w poczynaniach naukowych i organizacyjnych Pana Profesora. Zakłada On na Politechnice Wrocławskiej Katedrę Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej, zostaje jej kierownikiem i kieruje Katedrą do chwili obecnej.

Czy można zamknąć osobowość prof. Janusz Mroccki w precyzyjnie skonstruowane ideowe szufladki? Jest to chyba niemożliwe. Wymyka się z nich. Wystawia się na widok publiczny, oddaje się czemuś z wielkim zaangażowaniem (patrz działalność w Komitecie Metrologii i Aparatury Naukowej PAN), po czym wycofuje się, chowa, znika. To osobowość, którą trudno pojąć, inteligencja w ciągłym ruchu, przyjaźń szczerą, bezwzględna harmonia słowa z czynem, wysoki poziom empatii, bezwzględne szanowanie uczuć drugich i wszelkich norm i reguł społecznych. Myślę, że to osobowość wielokształtna, wielowartościowa. To dzięki temu wzbudza On ludzki podziw i zaufanie. Znany jest, że podczas różnych wystąpień posługuje się licznymi cytatami znanych osobowości świata literatury, nauki i sztuki. Pewna specyficzna forma przekazu jest widoczna w jego rozmowach czy wykładach. Tą formą jest symbolika, zamierzona zagadkowość, która jest dla niego narzędziem Jego oddziaływania na drugich. Jest dobrym mówcą, ale potrafi też słuchać. Bowiem, jak twierdzi, należy słuchać tego, czego ludzie nie mówią, i tu cytuje francuskiego pisarza eseistę André Malraux: „Prawda o człowieku leży przede wszystkim w tym, czego nie mówi”. Wsłuchuje się w wypowiedzi swojego każdego rozmówcy, twierdząc, że każdy ma „swoją pieśń”. Zapytany, skąd taki sentyment do tak licznych cytatów, odpowiedział: „Tymi cytatami staram się wskazać odmienny sposób postrzegania rzeczywistości, tworzyć tym samym nowe źródła inspiracji, jak i podmioty, które po głębokim przemyśleniu uchronią nas od trywialności ulicy i coraz to bardziej rozkrzyczanego tłumu”.

W uznaniu osiągnięć Profesorowi Januszowi Mrocckowi powierzano wiele funkcji w środowisku naukowym, w tym wiele z wyboru. Był wiceprezydentem International Symposium of Optical Applied Science and Engineering „*Optical Diagnostics in Fluid and Thermal Flow*” w San Diego w USA. Od roku 1994 roku jest członkiem

założycielem International Technical Working Group on Penetrating Radiation w USA. Również od roku 1994 przez kilka lat był członkiem Sekcji Miernictwa Interdyscyplinarnego Komitetu Badań Naukowych. W latach 1999–2005 był członkiem Senatu Politechniki Wrocławskiej. Od roku 1993 jest członkiem Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej Polskiej Akademii Nauk (KMiAN PAN), a w latach 2001–2007 był wiceprzewodniczącym tego Komitetu, natomiast w okresie 2007–2015 pełnił szaczną funkcję przewodniczącego KMiAN PAN. To właśnie w roku 2014 Komitet Metrologii i Aparatury Naukowej został uznany w drodze konkursu za najlepiej pracujący Komitet Polskiej Akademii Nauk. W latach 2013–2020 Profesor Janusz Mroczka pełnił również funkcję członka Centralnej Komisji ds. Stopni i Tytułów (sekcja VI nauki techniczne, elektronika). Tu pozwolę sobie przytoczyć słowa, które wypowiedział zapytany o to, czym była dla Niego Centralna Komisja: „...to miejsce szczególne, gdzie zrozumiałem, na czym polega krytycyzm chroniący nas od ślepego ulegania autorytetowi; jasność i ścisłość w naukowej argumentacji; bezwzględne dążenie do prawdy na różnych polach ludzkich dociekań”. W środowisku naukowym doskonale znane są sporządzone przez Niego wnikliwe recenzje w postępowaniach habilitacyjnych i profesorskich. Pełne konstruktywnej krytyki, obiektywne i bardzo rzeczowe, stały się niewątpliwie wyznacznikiem i wzorem do naśladowania. Prof. J. Mroczka stosuje wszystkie dopuszczalne reguły oceny, by pokazać osiągnięcia Kandydata, jego zdolności twórcze, nieprzeciętną inteligencję, pracowitość, zmysł twórczy i organizacyjny, ale również w skrajnie odmiennych uwarunkowaniach ma cywilną odwagę ujawnić jego hipokryzję, zakłamanie, pokazać zapożyczenia i inne słabości ludzkiego postępowania.

Szeroko znana jest również działalność międzynarodowa Pana Profesora. Kontakty z ośrodkami naukowymi w Berlinie, Bostonie, Brukseli, Eindhoven, Marsylii, Preston, San Diego, Szanghaju, Toronto, Yokohamie zaowocowały wspólnymi projektami naukowymi i publikacjami. Był ponadto członkiem wielu komitetów naukowych zagranicznych i krajowych konferencji.



Za swoją działalność uzyskał liczne nagrody i wyróżnienia. Spośród wielu nie sposób nie wymienić m.in.: Nagrody Ministerstwa Edukacji Narodowej II stopnia otrzymanej w 1989 r., Nagrody Wydziału IV Polskiej Akademii Nauk otrzymanej w 1993 r., Subsydium Profesorskiego Fundacji Nauki Polskiej za rok 2005, Nagrody Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za Wybitne Osiągnięcia w Opiece Naukowej i Dydaktycznej otrzymanej w 2014 r., Nagrody Prezesa Polskiej Akademii Nauk przyznanej w roku 2015 za stworzenie szkoły naukowej w zakresie metrologii elektronicznej i fotonicznej wraz z cykliczną serią wydawniczą pt. „Problemy metrologii elektronicznej i fotonicznej” oraz czasopismem z listy filadelfijskiej *Metrology and Measurement Systems*, Nagrody Naukowej im. prof. Mariana Suskiego czy wreszcie Nagrody *Professor Opoliensis*, przyznanej w 2014 roku. W tym miejscu nie sposób nie wymienić również ponad 30 Nagród JM Rektora Politechniki Wrocławskiej. Szanowny Kandydat został także odznaczony Krzyżem Oficerskim Orderu Odrodzenia Polski, Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski, Złotym, Srebrnym i Brązowym Krzyżem Zasługi, Medalem Komisji Edukacji Narodowej, Złotą Odznaką Politechniki Wrocławskiej z Brylantem, Medalem im. prof. Kazimierza Idaszewskiego oraz Medalem im. Prof. Włodzimierza Krukowskiego. W roku 2020 znalazł się na liście prestiżowego rankingu najbardziej wpływowych ludzi nauki na świecie, tzw. lista TOP 2%. W roku 2021 został odznaczony Krzyżem Komandorskim Orderu Odrodzenia Polski.

Profesor Janusz Mrocza jest **doktorem honoris causa**:

- Politechniki Lubelskiej, tytuł nadany w roku 2014,
- Politechniki Opolskiej, tytuł nadany w roku 2017,
- Politechniki Gdańskiej, tytuł nadany w roku 2019,
- Wojskowej Akademii Technicznej im. Jarosława Dąbrowskiego, tytuł nadany w roku 2019.

Analiza dorobku Profesora Janusza Mroczy bez odniesienia się do Jego osobowości w krótkiej recenzji wydaje się być skazana na niepowodzenie. W przypadku tego Uczonego każde analityczne „TAK” generuje natychmiast interpretacyjne „NIE”. Swoim sposobem bycia udowadnia, że nie ma określenia, epitetu czy formy, w którą

można by zamknąć Jego intelektualną przestrzeń. Jest postacią przerastającą *status quo*. Zawsze próbuje czegoś więcej. Każdy, kto z Nim się spotkał, nie zapomni Go nigdy. Swoim intelektem, sposobem bycia, otwartością poraża, ale jednocześnie zaraża. Ten urodzony indywidualista znakomicie odnajduje się w wieloosobowym zespole, w żaden sposób nie przeszkadzając w niezależności intelektualnej swoich współpartnerów.

Jest On uczonym w starym stylu, dla którego priorytetem jest służenie swojej *Alma Mater* w jej rozkwicie i dbanie o rozwój intelektualny swoich wychowanków, bowiem, jak twierdzi, cyt.: „...wychowanie młodego pokolenia to sprawa serio”. Mogę powiedzieć, że jest beneficjentem tego samego naukowego rodowodu, co Jan Łukasiewicz, Władysław Tatarkiewicz, Tadeusz Kotarbiński, Kazimierz Ajdukiewicz, Izydora Dąmbska, których często przywołuje w swoich wystąpieniach. Na półkach Jego prywatnej biblioteki czołową pozycję zajmują dzieła przedstawicieli szkoły lwowsko-warszawskiej. To one są chyba tym źródłem jego intelektualnych uwarunkowań i motywacją w Jego działaniu. Nieprzejednany w swoich zasadach etycznych, pozostaje jedną z ostatnich redut wyjątkowości. Jest On przykładem, że można budować karierę zawodową inaczej.

Jak ocenić prof. J Mroczkę w trzech słowach? Uczący, doradzający, pomagający, jednym słowem życzliwy człowiek. Chcąc to rozwinąć, napotykaemy na osobowość wielowątkową, wielopłaszczyznową. Ta osobowość zmusza do zastanowienia z przywołaniem kwestii fundamentalnych: Czym jest prawda? Jak pogodzić bezstronność z politycznym i moralnym uwarunkowaniem? I wreszcie – czym jest zło, z którym prof. J. Mrocza, dokonując oceny ludzkiego dorobku naukowego, musiał chęć nie chęć niekiedy się spotkać?

Prywatnie jego pasją jest zaaranżowany i stworzony samodzielnie od podstaw przepiękny ogród z wieloma gatunkami egzotycznych iglaków, wkomponowanymi wśród kwiatów granitowymi ścieżkami i klombami. To prawdziwy Jego azyl, w którym spędza cały wolny swój czas. Tu znajduje natchnienie, relaks i mimo fizycznego zmęczenia prawdziwy wypoczynek, dystansując się od zewnętrznego zamętu.

Jest On przykładem człowieka żyjącego w zgodzie z naturą, kierującego się rozumem. Taki sposób bycia prezentują stoicy. Dopełniając opis Jego sylwetki, zacytuję myśli trzech stoickich przedstawicieli, antycznych filozofów, których przemyślenia mogą być dla każdego z nas drogowskazem po nieznanych ścieżkach i w trudnych chwilach naszego życia, jednocześnie uzasadnieniem takiego sposobu postrzegania sylwetki Kandydata:

Spśród wszystkich ludzi tylko ci znajdują spokój, którzy poświęcają czas na filozofię, tylko oni prawdziwie żyją. Nie zadawała się wyłącznie baczny poznawaniem swych dni, ale dodają też wieki przyszłe. Wszystkie plony przeszłości są dodawane do ich spichlerzy. Tylko niewdzięcznik nie pojmie, że ci wielcy architekci szacownych myśli narodzili się dla nas i dla nas zaprojektowali sposób życia.

SENEKA

Podstawowe zadanie w życiu polega na tym, by identyfikować i odpowiednio dzielić sprawę na zewnętrzne, nad którymi nie mamy kontroli, oraz na te związane z naszymi wyborami. Gdzie więc należy szukać dobra i zła? Nie w pozostających poza naszą kontrolą rzeczach zewnętrznych, ale w sobie, w wyborach, które do nas należą [...].

EPIKTET, *Diatryby*, 2.5.4–5

Natura rzeczy rozumnych dała każdemu człowiekowi moc rozumowania. Podobnie dała mu też inną moc: tak jak natura przekształca zgodnie z własnym celem wszystkie zawady i przeciwności oraz wyznacza im miejsce w ustalonym porządku rzeczy i pochłania je, tak i każda istota rozumna może zmienić wszelką przeszkodę w tworzywo dla własnych celów.

MAREK AURELIUSZ, *Rozmyślenia*, 8.35

2. Osiągnięcia w pracy naukowo-badawczej

Działalność naukowo-badawcza Profesora obejmuje szeroko pojętą elektronikę i metrologię. Znane i cenione są prace naukowe Profesora dotyczące metodologii procesu poznawczego, pomiarów pośrednich źle uwarunkowanych, tzw. problemu odwrotnego, analizy spektralnej promieniowania rozproszonego w opisie układów optycznych dyspersyjnych, metodologii łączenia danych

pomiarowych o różnej przestrzennej rozdzielczości z wykorzystaniem deterministycznych i stochastycznych metod przetwarzania, wykorzystania reprezentacji czasowo-częstotliwościowych sygnałów w przetwarzaniu danych pomiarowych, opracowania metody momentów w analizie układów dyspersyjnych, a także badania procesu spiekania mikro- i nanocząsteczek z wykorzystaniem rozpraszania światła i tworzenia algorytmów generacji agregatów fraktalnych. Znana w środowisku naukowym seria wydawnicza pt. „Problemy metrologii elektronicznej i fotonicznej”, zapoczątkowana wiele lat temu i kontynuowana do dziś, jest cenionym kompendium wiedzy z zakresu najnowszych metod pomiarowych z obszaru elektroniki i fotoniki. Seria ta prezentuje osiągnięcia naukowe młodych pracowników naukowych wraz z ich mentorami. To również dzięki niej Profesor nazywany jest założycielem polskiej szkoły metrologii elektronicznej i fotonicznej. Ważnym osiągnięciem i wkładem Profesora było również wprowadzenie czasopisma *Metrology and Measurement Systems* na listę filadelfijską.

Dorobek naukowy Profesora Janusza Mroczone obejmuje **446** publikacji (**144** z listy filadelfijskiej), jest On współautorem **13** książek (**5** zagranicznych, **8** krajowych) i **8** patentów (w tym 4 wdrożonych). Dane bibliometryczne są następujące: wg bazy *Web of Science*: **1542** cytowania oraz $h = 26$; wg bazy *Scopus*: **1791** cytowań oraz $h = 27$; wg *Google Scholar*: **2291** cytowań oraz $h = 31$. Prof. Janusz Mroczone był realizatorem (jako kierownik lub główny wykonawca) **31** grantów (w tym 7 międzynarodowych).

Profesor był wielokrotnie zapraszany przez redakcje renomowanych czasopism zagranicznych jako recenzent. Opracowywał również liczne recenzje monografii i książek.

3. Zasługi w zakresie opieki naukowej i dydaktycznej

Dorobek Profesora Janusza Mroczone w zakresie rozwoju kadry jest imponujący i obejmuje **3** recenzje doktoratów *honoris causa*, **58** recenzji wniosków profesorskich, **56** recenzji w przewodach habilitacyjnych, **22** recenzji rozpraw doktorskich oraz **56**-krotne pełnienie funkcji Przewodniczącego Komisji Habilitacyjnej.



Profesor wypromował łącznie **26** doktorów. Wielu z nich to profesorowie, którzy pracują na innych niż ich Mentor uczelniach, np. Politechnika Opolska czy nawet University of Central Lancashire, Preston w Anglii. Wspólnym paradygmatem założonej przez Profesora szkoły metrologii elektronicznej i fotonicznej jest szerzenie szczytnej idei promującej relacje mistrz–uczeń. Ideę tę Profesor Mroczka prezentował wielokrotnie, wygłaszając wykład pt. „Mistrz i uczeń” w różnych ośrodkach akademickich w kraju. Efektem wdrażania tej idei są również zagraniczne doktoraty prowadzone przez Pana Profesora. Wypromował on z wyróżnieniem **4** doktorów we Francji, tzw. doktoraty *cotutelle*, a ostatni otrzymał prestiżową nagrodę Marii Skłodowskiej-Curie za najlepszy doktorat w Europie. Upowszechnianie polskiej nauki za granicą realizuje również przez swoich doktorantów, wysyłając ich do licznych ośrodków zagranicznych, gdzie odbywają oni staże. Ośrodkami tymi są:

- Institut Universitaire des Systemes Thermiques Industriels, Marseille, Francja,
- Laboratoire d’Énergétique des Systèmes et Procédés, Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, Francja,
- Department of Biomedical Engineering, Boston University, USA,
- Department of Engineering and Product Design, University of Central Lancashire, Preston, Wielka Brytania,
- Stiftung Institut für Werkstofftechnik, Bremen, Niemcy,
- Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Bruksela, Belgia.

Promowanie polskiej nauki w ośrodkach zagranicznych zostało nagrodzone w 2013 r. przez Prezydenta Rzeczypospolitej Polskiej Krzyżem Oficerskim Orderu Odrodzenia Polski.

W roku 2021 Profesor Janusz Mroczka został odznaczony Krzyżem Komandorskim Orderu Odrodzenia Polski za wybitne zasługi dla rozwoju polskiej nauki, za szczególne osiągnięcia w promowaniu polskiej myśli naukowej na świecie.

Ta część recenzji, traktująca o zasługach Pana Profesora w zakresie opieki naukowej jest również dla mnie osobiście okazją do refleksji. W roku 2012 dane mi było odbyć staż naukowy w Katedrze

Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej w ramach cyklu staży naukowych pracowników mojej Uczelni odbywanych w wiodących ośrodkach naukowych. Praca z tak dynamicznym mentorem to codzienne konsultacje naukowe pozwalające na ewaluację na bieżąco programu badawczego, to codzienne dyskusje w zespole Pana Profesora, to nieprawdopodobna motywacja, czerpanie z Jego doświadczenia, to nieocenione wsparcie i pomoc. Gdybym miał określić w kilku słowach, jak ważne było wówczas dla mnie to wsparcie, wyraziłbym to w sposób następujący: To wskazanie autostrady myśli naukowej, która biegła cały czas tuż obok nas, ale błędząc, nie byliśmy w stanie jej zauważyć. To wskazanie drogi, gdy nie widać nawet ścieżki. Wskazanie, ale nie prowadzenie za rękę. Zachęta do samodzielnego myślenia i ciężkiej pracy, ale nie kopiowanie i bezkrytyczne naśladowanie.

4. Zasługi dla Akademii Górniczo-Hutniczej i środowiska naukowego

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie, zamierzająca nadać tytuł doktora *honoris causa* Profesorowi Januszowi Mrocze, należy do elity polskich uczelni, prowadzących działalność naukową, badawczą i dydaktyczną w zakresie szeroko rozumianych nauk technicznych, w której nauki ściśle mają również bardzo silną reprezentację. Powołana i założona w 1913 roku, jest Uczelnią publiczną o zasięgu ogólnopolskim, rozwijającą partnerską współpracę z uczelniami Europy i świata, konsekwentnie budującą silną pozycję na rynku edukacyjnym i badawczym, nie tylko w wymiarze krajowym, ale także międzynarodowym. Priorytetem Uczelni jest realizacja zadań wkomponowanych w trójkąt wiedzy: kształcenie – badania naukowe – innowacje.

Czołowe miejsce Uczelni związane jest przede wszystkim z działalnością badawczą, dydaktyczną i ekspercką wykonywaną przez liczną grupę pracowników Uczelni. Mocna pozycja Akademii znalazła także swe odbicie w szeroko rozbudowanej sieci kontaktów międzynarodowych, w której Uczelnia pełni ważną rolę oraz jest cenionym i poważanym partnerem. Świadczą o tym wysokie miejsca



w prestiżowych rankingach. O randze tej pozycji zaświadczać mogą także ludzie i instytucje, z którymi Akademia Górniczo-Hutnicza współpracuje, w tym jej doktorzy *honoris causa*. Akademia bardzo konsekwentnie podchodzi do realizacji tradycji nadawania godności doktora *honoris causa* tym osobistościom, które wniosły największy wkład do nauki lub praktyki biznesu, a jednocześnie wyróżniły się zakresem i intensywnością współpracy z tą Uczelnią. Wydaje się bowiem, że dopiero łączne spełnienie tych dwóch kryteriów wskazywania doktorów *honoris causa* daje wiarygodny merytorycznie i wizerunkowo pozytywny obraz Akademii. Z tego punktu widzenia wybór osoby Profesora Janusza Mroczonego jako pretendenta do godności doktora *honoris causa* jest wyborem najlepszym z możliwych. Po pierwsze bowiem Profesor jest wybitnym, renomowanym, cenionym i powszechnie szanowanym autorytetem w zakresie metrologii elektronicznej i fotonicznej. Po wtóre należy również podkreślić, że Pan Profesor prowadzi współpracę z Akademią Górniczo-Hutniczą od 23 lat. Najważniejszymi znanymi mi efektami tej współpracy jest stworzenie warunków do rozwoju naukowego Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej (WEAiIB) AGH. Było to możliwe dzięki sprawnemu przeprowadzeniu procesu opiniowania wniosków o przyznanie WEAiIB AGH uprawnień do nadawania stopnia doktora i doktora habilitowanego w dyscyplinie elektronika. Profesor Janusz Mroczonego aktywnie uczestniczył również w promowaniu Akademii w środowisku krajowym. Przejawiało się to przede wszystkim we wspieraniu merytorycznym pracowników naukowych WEAiIB AGH oraz udziale w komitetach naukowych konferencji organizowanych przez WEAiIB Akademii. Do chwili obecnej zorganizowane zostały 32 konferencje naukowe.

Inicjatywa i ogromna determinacja Profesora doprowadziły do zorganizowania w AGH Kongresu Metrologii w roku 2007. Wzięło w nim udział około 250 uczestników reprezentujących wszystkie ośrodki akademickie, a także wybrane jednostki badawcze i produkcyjne z zakresu metrologii i aparatury naukowej. W wydarzeniu uczestniczyło również kilkunastu gości z zagranicy, większość z nich

wyłosiło wykłady plenarne. W program Kongresu zostały włączone obchody 50-lecia Katedry Metrologii WEAIIB AGH, co stało się dodatkową okazją do przekazania uczestnikom poszerzonej informacji, zarówno o Akademii, Wydziale, jak i Katedrze. Z tej okazji został wydany Medal 50-lecia Katedry Metrologii, którym zostały odznaczone ówczesne Władze Akademii, Władze Wydziału, pracownicy Katedry, jej byli kierownicy oraz wybitni metrologowie z innych ośrodków.

Od kilkudziesięciu lat Profesor bierze czynny udział w rozwoju kadr. Jest obecny na wielu etapach awansu naukowego pracowników, począwszy od doktoratu, a skończywszy na uzyskaniu tytułu profesorskiego. Wieloletnia współpraca Pana Profesora z pracownikami Akademii doprowadziła do nawiązania przez nich współpracy naukowej, łącząc potencjał Uczelni z University of Central Lancashire. Efektem tej współpracy była realizacja dwóch grantów naukowych pt. „Metrology Guided Radiotherapy oraz Engineering and Computational Science for Oncology Network (ECSON)”.

5. Podsumowanie

Prof. Mrocčka to autorytet ukształtowany własną pracą, sposobem bycia, interakcją z różnymi ludźmi w różnych sprawach, sposobem poszukiwania prawdy oraz odwagą w jej głoszeniu, otwartością, zaufaniem do innych. Taki mistrz jest środowisku akademickiemu bardzo potrzebny. Jesteśmy bytami przygodnymi, kruchymi, słabymi i niewystarczającymi samemu sobie zarówno w aspekcie całości, jak i w poszczególnych wymiarach naszego funkcjonowania. Potrzebujemy oparcia, stąd pojawienie się na naszej drodze takiej osobowości jest czymś szczególnym i ze wszech miar pożądanym.

Pan Profesor w chwilach trudnych nigdy się nie poddawał. To utalentowany tytan pracy. Człowiek wyrazisty, odważny, bezkompromisowy i niepokonany, broniący własnej niezależności. Swoim oponentom przeciwstawiał wiedzę, merytoryczne przygotowanie, błyskotliwe i złożone wypowiedzi, elegancję i dystygnowane zachowanie. To postać charyzmatyczna, której trudno nie zauważyć. Swoim wychowankom tłumaczył, że cyt.: „...w nauce prawem jest etyka, a sprawy haniebne nie ulegają przedawnieniu”. Dzięki uporowi



i determinacji przecierał niedostępne szlaki naukowego labiryntu, prowadząc nimi do celu swoich wychowanków.

W swoich poczynaniach przeciwstawia się niezdrowej ambicji, zazdrości, chęci dominowania nad drugim, robienia kariery kosztem pracy drugiego. Twierdzi, że „subtelna pycha i próżność, która w łatwy sposób gnieździ się umysłach uczonych, rodzi subiektywizm, błąd i niewłaściwą ocenę rzeczywistości”.

To, co można zauważyć w twórczej aktywności prof. J. Mroczonego, to głęboka filozoficzna refleksja nad sensem i istotą poznania, a w szczególności Jego metodologiczne poczynania w metrologii, którą rozwija, propaguje, a przede wszystkim ukazuje jej tożsamość jako odrębnej dziedziny nauki, będącej merytoryczną nadbudową miernictwa. Znajdujemy te elementy w redagowanej przez Niego serii wydawniczej „Problemy metrologii elektronicznej i fotonicznej”, a w szczególności w artykule „The cognitive process in metrology”^{*}, opublikowanym w czasopiśmie *Measurement*. Znamienne są słowa, które prof. J. Mroczonego wywiedziały, cyt.: „...pod pojęciem nauki rozumiemy zwykle zespół twierdzeń uznawanych aktualnie powszechnie za prawdziwe, stanowiący usystematyzowaną całość i wchodzących w skład określonej dyscypliny badawczej, a w przypadku nauk przyrodniczych weryfikowalnych doświadczalnie. Jeżeli metrologia jest dyscypliną naukową, to podstawowe jej problemy powinny tworzyć taki zbiór twierdzeń. Sprezycowanie i udowodnienie prawdziwości poszczególnych twierdzeń oraz powiązanie ich w spójny system jest jej zasadniczą treścią i zadaniem pracy nad podstawowymi problemami metrologii, a tym samym i celem publikowanych od wielu lat w tej serii prac, zatytułowanej «Problemy metrologii elektronicznej i fotonicznej». W tym obszernym zbiorze prac należałoby zastanowić się, które przesłanki ogólne można przyjąć w rozważaniach nad statusem naukowym metrologii jako ogólnie uznawane pewniki, z których następnie można byłoby wywieść poszczególne twierdzenia o metrologii”.

^{*} J. Mroczonego, „The cognitive process in metrology”, *Measurement* 46(8), 2896–2907, 2013.

Prof. J. Mrocza należy do tej specyficznej wspólnoty ludzi, gdzie egzystencja człowieka żywi się wartościami, a ich sumienie nie jest skażone żadnymi ideologicznymi uwarunkowaniami. Jest w opozycji do rozprzestrzeniającego się relatywizmu obyczajowego i moralnego, dając wyraz swoim postępowaniem na rzecz ocalenia człowieka i jego własnego świata. W środowisku, w którym dane jest mu być, budzi poczucie podmiotowości, wielkości i wzajemnego szacunku. Jest człowiekiem wielkich dokonań i wielkich nadziei, jakie z nim wiążą inni. Swoimi poczynaniami prezentuje On to, co w nauce najszlachetniejsze, najbardziej wartościowe. To odwaga, szczerość, prawda, niezależność i uczciwość.

6. Wniosek końcowy

Z głębokim przeświadczeniem przedstawiam wniosek o nadanie Panu Profesorowi Januszowi Mrocze, członkowi korespondentowi Polskiej Akademii Nauk, tytułu doktora *honoris causa* Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie.

Z całym przekonaniem wyrażam opinię, że prof. Janusz Mrocza zasługuje na wyróżnienie go doktoratem *honoris causa*. Tytuł ten stanowić będzie wyraz uznania dla Jego bogatego dorobku, cennego i wspierającego wizję moralności i uczciwości w nauce, będzie też aktem potwierdzającym więź, jaka łączy od lat Akademię Górniczo-Hutniczą z Jego myślą i z Nim samym. W szeregu uczelni, które uhonorowały prof. Janusza Mroczkę tym zaszczytem, nie może wręcz zabraknąć Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie.

Zaufanie, szacunek, lojalność, sprawiedliwość, wzajemność, prawda oraz solidarność to elementy wyznaczające przestrzeń moralną Prof. Janusza Mroczy. I tak jak pisze profesor Michał Heller*: „Są cnoty bardziej lub mniej cenione. Ale jedna cnota ceniona przez wszystkich – prawda. Każdy ceni prawego człowieka. Każdy chciałby być prawym człowiekiem. Prawym się człowiek nie rodzi. Prawda trzeba w sobie wypracować, ale dążyć do prawdy może każdy.

* M. Heller, *Zakład o życie wieczne*, Copernicus Center Press, Kraków, 2016.





Nic tak nie chroni przed złem, jak czynienie dobra. Dobra wola jest warunkiem dobrych czynów. Czy wszystko można załatwić, gdy się ma odpowiednie protekcje (i poglądy)? Budzi w nas moralny szacunek, gdy widzimy, że ktoś jest prawy”.

To tymi słowami chciałbym zakończyć moją ocenę Profesora Janusza Mroczi, dając tym samym pełną rekomendację dla wyróżnienia Go tym akademickim zaszczytem.

Lublin, dn. 20 maja 2021 r.

PHC



Opinia
o osiągnięciach i dorobku naukowym
prof. dr. hab. inż. Janusza Mroczi,
profesora zwyczajnego Politechniki Wrocławskiej,
członka korespondenta Polskiej Akademii Nauk
oraz Kandydata do tytułu i godności Doktora Honoris Causa
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie,
przygotowana na wniosek prof. dr. hab. inż. Jerzego Lisa, Rektora
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wprowadzenie

Świat jest w stanie osiągać coraz wyższe stopnie rozwoju, rozkwitać cywilizacyjnie tylko wtedy, gdy potrafi rozpoznać, uczy się od nich i podąża za najlepszymi. To najlepsi, najwybitniejsi (w danej dziedzinie) wyznaczają nowe trendy i kierunki rozwoju cywilizacyjnego, które przybliżają nas wszystkich do stanu, w którym ludzkość nie będzie znała głodu, wojen, chorób, czy też innych trosk. Rozwój naukowy bez wątpienia jest jednym z takich kierunków, zaś wybitni przedstawiciele nauki, Ci Najlepsi, są filarami, które utrzymują i wznoszą poziom naszego cywilizacyjnego rozwoju na coraz wyższe płaszczyzny, dzięki czemu poszerza się horyzont naszej wiedzy i rozumowania. Jedną z takich wybitnych osobistości nauki, której niekwestionowany wkład pozwolił na ekspansję naszego poznania, jest Profesor Janusz Mrocza.

Spółeczność naukowa posiada różne możliwości docenienia zasług najlepszych ze swego grona. Takim uhonorowaniem, a także najwyższym zaszczytem, przyznawanym najlepszym, jest honorowy tytuł Doktora – Doktor *Honoris Causa*, tradycyjnie nadawany

przez społeczności akademickie Uczelni dla najbardziej zasłużonych przedstawicieli świata nauki, którzy jednocześnie reprezentują niezachwianą i niekwestionowaną postawę moralną. Kandydaci do tego prestiżowego wyróżnienia winni posiadać ponadto wybitne osiągnięcia naukowe, dydaktyczne i organizacyjne, zaś swoim przykładem oświeślać naukową drogę dla innych przedstawicieli nauki, nauczycieli akademickich i przede wszystkim studentów. Tytułem Doktora *Honoris Causa* wyróżnia się dziś wybitnych przedstawicieli nie tylko nauki, ale również kultury i życia publicznego. Osoby te posiadają ogromny autorytet naukowy, szacunek społeczny, ale również nieposzlakowaną opinię oraz nienaganną postawę moralną i etyczną. Efekty ich pracy i działalności, w formie często kilkudziesięcioletniej drogi, całokształt kariery naukowej, dydaktycznej, organizacyjnej, czy też działalność społeczna, przynoszą dla ludzkości trwale i wielopłaszczyznowe korzyści.

Jako przedstawiciel środowiska naukowego jestem przekonany, iż Profesor Janusz Mroccka, profesor zwyczajny Politechniki Wrocławskiej, członek korespondent Polskiej Akademii Nauk, a także Doktor *Honoris Causa* Politechniki Gdańskiej, Lubelskiej i Opolskiej oraz Wojskowej Akademii Technicznej, jest bez wątpienia przykładem szanowanego pracownika naukowego, którego osobowość skupia powyższe wartości, predysponujące Pana Profesora do otrzymania tego znaczącego wyróżnienia.

Przyznanie tej wyjątkowej godności zawsze poprzedza wnikliwa i wieloaspektowa analiza osiągnięć Kandydata do godności Doktora *Honoris Causa*, włączając w to nie tylko osiągnięcia naukowe, dydaktyczne, czy też organizacyjne, ale również sylwetkę moralną i wartości etyczne prezentowane przez Kandydata – metrologicznie mówiąc „wzorca”, „etalonu” dla środowiska naukowego. Analizę tę przeprowadzają zarówno Senat uczelni nadającej tytuł, ale również Senaty kilku innych prestiżowych uczelni akademickich, reprezentujących pokrewne obszary nauk. Z tych uczelni powoływani są recenzenci w prowadzonej procedurze.

Wnioskodawcą przyznania Profesorowi Januszowi Mrocckie tytułu Doktora *Honoris Causa* Akademii Górniczo-Hutniczej im.

Stanisława Staszica w Krakowie jest Dziekan Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej, jednostki organizacyjnej, dla której Pan Profesor Mroczka wykazywał wieloletnie wsparcie w różnych aspektach działalności Wydziału.

Natomiast ja bardzo cieszę się z inicjatywy Akademii Górniczo-Hutniczej, gdyż jako pracownik naukowy Instytutu Optoelektroniki Wojskowej Akademii Technicznej przez wiele lat byłem świadkiem ogromnego wsparcia i zaangażowania Pana Profesora w zagadnienia naukowe naszej Uczelni. Wojskowa Akademia Techniczna, tak jak Politechnika Opolska, Gdańska i Lubelska, w 2019 roku uhonorowała Pana Profesora również tytułem Doktora *Honoris Causa*. To prestiżowe wyróżnienie Pan Profesor otrzymał za wkład w ramach współpracy naukowej z Wydziałem Elektroniki oraz Instytutem Optoelektroniki, w szczególności za niewątpliwy udział w rozwój kadry naukowej tych jednostek.

Osobiście jest to dla mnie wyjątkowe wyróżnienie, iż tak znana i prestiżowa Uczelnia, którą jest Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie, powierzyła mi to bardzo ważne i zaszczytne zadanie opiniowania dorobku Profesora Janusza Mroczki w postępowaniu o przyznanie Mu tytułu Doktora *Honoris Causa* tej Uczelni.

Sylwetka Kandydata do tytułu i godności Doktora *Honoris Causa*

Prof. dr hab. inż. Janusz Mroczka urodził się w 1952 r. w Dębicy, gdzie ukończył Liceum Ogólnokształcące w 1971 r. Pan Profesor Mroczka swoją bogatą karierę naukową związał praktycznie całkowicie z Politechniką Wrocławską. W 1971 r. podjął studia na Wydziale Elektroniki Politechniki Wrocławskiej, które ukończył w 1976 r., uzyskując tytuł zawodowy magistra. Stopień naukowy doktora nauk technicznych uzyskał w 1980 r. w Instytucie Metrologii Elektrycznej, zaś w 1991 r. uzyskał stopień naukowy doktora habilitowanego. Lata 80-te i 90-te były zatem właśnie tym okresem, który wpłynął i ukształtował zainteresowania naukowe Pana Profesora, zainteresowania, które kontynuowane są do dzisiaj, oczywiście znacznie wykraczające poza pierwotne oraz rozszerzone w perspektywie czasu,

z uwagi na rozwój naukowy Pana Profesora w kolejnych latach Jego kariery naukowej, aż do chwili obecnej.

Zasłużony tytuł naukowy profesora uzyskał już w 1996 r., niebawem szybko, biorąc pod uwagę trudną i wymagającą dziedzinę wiedzy, jaką Pan Profesor reprezentuje. Trzy lata później, w 1999 r., powierzono mu stanowisko profesora zwyczajnego na Politechnice Wrocławskiej. W latach 1991–1996 Pan Profesor pracował jako dyrektor Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej. Niedługo później, w 1998 r., założył Katedrę Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej, którą kieruje do dzisiaj. Było to duże osiągnięcie, ponieważ założona przez Niego Katedra była pierwszą po 30-letniej przerwie (od 1968 roku), ale również było to działanie nieszablonowe i trudne formalnie, ponieważ wymagało zwrócenia się przeciw panującej od 30 lat doktrynie wiążącej ściśle strukturę uczelni z wydziałami i instytutami wydziałowymi. Jednakże już ten fakt podkreśla silną dedykację Pana Profesora do rozwijania nauki, gdyż od tamtego czasu niezmiennie wyraża On opinię, że rozwój nauki odbywa się właśnie na najniższych szczeblach organizacyjnych; z naukowego punktu widzenia są to właśnie katedry naukowe, a także fakt, iż rozwój uczelni zależy przede wszystkim od ludzi, którym należy możliwie wysoko ustawiać poprzeczkę wymagań.

Profesor Janusz Mrocza jest Doktorem *Honoris Causa* czterech prestiżowych polskich Uczelni, a mianowicie: Politechniki Lubelskiej (przyznanym w 2014 r.), Politechniki Opolskiej (2016 r.), Wojskowej Akademii Technicznej im. Jarosława Dąbrowskiego (2019 r.) oraz Politechniki Gdańskiej (2019 r.).

W latach 1999–2005 Profesor Janusz Mrocza pełnił zaszczytną funkcję senatora Senatu Politechniki Wrocławskiej. Jednakże Pan Profesor aktywnie uczestniczy także w pracach wielu krajowych i międzynarodowych organizacji i komisji. Od 1993 r. jest członkiem Komitetu Metrologii i Aparatury Pomiarowej PAN; w latach 2001–2007 był Wiceprzewodniczącym, a w latach 2007–2015 Przewodniczącym Komitetu, który w 2014 r. został oceniony przez Prezydium PAN, jako najlepszy komitet naukowy w Polskiej Akademii Nauk.

W uznaniu Jego oddania środowisku naukowemu został powołany w 2010 r. na członka korespondenta Polskiej Akademii Nauk. Jest również członkiem Polskiego Towarzystwa Fizycznego. Działa bardzo aktywnie w The International Society for Optical Engineering (USA) i International Technical Working Group on Penetrating Radiation (USA). Od 1994 r. przez sześć lat był członkiem Sekcji Miernictwa Interdyscyplinarnego KBN (w której pełnił również funkcję jej Przewodniczącego). W latach 2013–2020 Profesor Janusz Mroczka był członkiem Centralnej Komisji ds. Stopni i Tytułów, w której prezentował swoje poglądy oraz wdrażał je do praktyki związanej z procedurami awansowymi w nauce.

Działalność naukowa Profesora obecnie zawiera się w pięciu zasadniczych obszarach takich jak:

1. uwarunkowania metrologiczne modeli fraktalnych fazy rozproszonej w analizie właściwości cząstek układów dyspersyjnych z wykorzystaniem światła rozproszonego,
2. analiza właściwości włókien światłowodowych z wykorzystaniem światła rozproszonego,
3. estymacja parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego w zastosowaniu do sygnału sieci energetycznej w systemach energii odnawialnej,
4. analiza niejednorodności płuc w warunkach sztucznej wentylacji pacjenta,
5. maksymalizacja mocy pozyskiwanej z paneli fotowoltaicznych w systemach autonomicznych.

Natomiast zainteresowania naukowe Pana Profesora są znacznie szersze i dotyczą metodologii procesu poznawczego, pomiarów pośrednich źle uwarunkowanych numerycznie, algorytmizacji problemu odwrotnego, metodologii łączenia danych pomiarowych o różnej przestrzennej rozdzielczości z wykorzystaniem deterministycznych i stochastycznych metod przetwarzania (fuzja danych), analizy spektralnej i polaryzacyjnej promieniowania rozproszonego w opisie właściwości układów dyspersyjnych, opracowania metody momentów w tych układach, badania procesu spiekania mikro i nanocząsteczek i tworzenia algorytmów generacji agregatów fraktalnych, a także

wykorzystania reprezentacji czasowo-częstotliwościowych sygnałów w przetwarzaniu danych pomiarowych.

Działalność naukowa Pana Profesora jest uznawana w skali międzynarodowej, o czym świadczy fakt, że jest członkiem wielu międzynarodowych organizacji, w tym jest stałym członkiem SPIE – The International Society for Optical Engineering (od 1992 r.), członkiem założycielem International Technical Working Group on Penetrating Radiation, USA (od 1994 r.), a także członkiem Polskiego Towarzystwa Fizycznego (od 1986 r.). Profesor Mroczka organizował i współprzewodniczył International Symposium of Optical Applied Science and Engineering, „*Optical Diagnostics in Fluid and Thermal Flow*”, San Diego, USA (1993 r.). W 2004 r. był głównym organizatorem Kongresu Metrologii we Wrocławiu. Jest ponadto członkiem wielu komitetów naukowych zagranicznych i krajowych konferencji oraz czasopism. Współpracuje również z wieloma ośrodkami naukowymi, m.in. w: Rouen, Berlinie, Bostonie, Yokohamie, Tampere, Szanghaju, Toronto, Preston, Lecce, Brukseli, Marsylii, Eindhoven, San Diego, Rio de Janeiro, Buenos Aires, Londynie, czy też w Padwie.

Za swoją działalność uzyskał liczne nagrody i wyróżnienia, m.in.: Nagroda II stopnia MEN (1989 r.), Nagroda Wydziału IV Nauk Technicznych PAN (1993 r.), Subsydium Profesorskie Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w 2005 r. za badania pt. „Metrologiczne uwarunkowania fotonicznych metod analizy spektralnej i polaryzacyjnej promieniowania rozproszonego w układach dyspersyjnych”, Nagroda Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za Wybitne Osiągnięcia w Opiece Naukowej i Dydaktycznej w 2014 r., Nagroda *Professor Opoliensis* w 2014 r., Nagroda Naukowa im. prof. M. Suskiego oraz Nagroda Prezesa Polskiej Akademii Nauk za stworzenie szkoły naukowej w zakresie metrologii elektronicznej i fotonicznej wraz z cykliczną serią wydawniczą pt. „Problemy metrologii elektronicznej i fotonicznej” oraz czasopismem z listy filadelfijskiej *Metrology and Measurement Systems* (2015 r.). Profesor Janusz Mroczka jest laureatem ponad trzydziestu Nagród JM Rektora Politechniki Wrocławskiej. Został odznaczony m.in.: Krzyżem Oficerskim Orderu

Odrodzenia Polski (2013 r.), Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski (2003 r.), Złotym, Srebrnym i Brązowym Krzyżem Zasługi (odpowiednio 1998 r., 1994 r. i 1989 r.), Medalem Komisji Edukacji Narodowej (2006 r.), Złotą Odznaką Politechniki Wrocławskiej z Brylantem (2007 r.), Medalem im. prof. Kazimierza Idaszewskiego (2010 r.) oraz Medalem im. prof. Włodzimierza Krukowskiego (2015 r.). Jako podsumowanie dotychczasowych zasług naukowych otrzymał Krzyż Komandorski Orderu Odrodzenia Polski (2021 r.).

Jego nazwisko jest również na liście opublikowanej w 2020 r. prestiżowego rankingu najbardziej wpływowych ludzi nauki na świecie TOP 2%.

Profesor Janusz Mrocza jest człowiekiem oddanym nauce oraz zasadom moralnym i etycznym pracy naukowej. Posiada silną osobowość charakteryzującą się odwagą w wyrażaniu opinii, potępianiu fałszu i poszukiwaniu prawdy. Doskonale zna realia pracy i codziennych problemów, które towarzyszą pracy naukowej. Wykazuje podejście bardzo pragmatyczne w skutecznym rozwiązywaniu trudności związanych z planowaniem, organizacją, a także realizacją badań naukowych. Jest człowiekiem o nieprzeciętnym umyśle, bardzo spostrzegawczym oraz pracowitym – cechy te są najważniejsze dla poszukiwaczy prawdy naukowej. Ponadto Jego bardzo pozytywne nastawienie do życia i do pracy naukowej, a także znakomity zmysł odnajdywania się w stosunkach interpersonalnych, otwartość dla ludzi oraz tolerancja na istnienie ludzkich niedoskonałości i ograniczeń pozwoliły Profesorowi, na przestrzeni wielu lat, zjednać do wspólnego działania na rzecz rozwijania nauki i jej propagowania szerokie spektrum naukowców. Profesor Mrocza nie tylko potrafi odpowiednio ukierunkować swoje działania naukowe, ale również bardzo chętnie pomaga innym zastanowić się nad znaczeniem przesłania, jakie powinni realizować pracownicy naukowcy i dydaktyczni. Bardzo często stosuje właściwą sobie metaforę i symbolikę, wpłatając w nie liczne, znakomicie i celnie dobrane cytaty uznanych autorytetów nauki, techniki i kultury. Profesor przywołuje je podczas swoich wykładów, w których miałem okazję wielokrotnie brać udział,

ale także w kontaktach interpersonalnych, kiedy to pod wierzchnią warstwą bezpośrednich treści przekazywanych przez Pana Profesora spostrzegawczy słuchacz doszuka się ukrytych, wieloaspektowych często treści, których przesłaniem jest ukazanie odbiorcy wielopłaszczyznowości problemu oraz różnego możliwego rozumienia i interpretacji, a tym samym pozwoli, czy też zasugeruje jeszcze głębszy poziom i komplementarne znaczenie Jego wypowiedzi. W ten sposób Pan Profesor przekazuje adeptom kariery akademickiej bardzo ważne treści, w których próbuje wskazać na powiązanie działań realizowanych w procesie kształtowania osobowości naukowca i dydaktyki na uczelni wyższej z długofalową oceną efektów tych działań przez środowisko akademickie. Te działania przejawiały się także w bardzo ważnym obszarze działalności Pana Profesora Mroczi, związanym z ocenianiem dorobku naukowego, kiedy to zawsze chętnie przygotowywał bardzo wartościowe, życzliwe, kompetentne i profesjonalne recenzje prac i osiągnięć podczas procedur awansowych kandydatów do wyższych stopni i tytułów naukowych.

Osiągnięcia w pracy naukowo-badawczej Kandydata do tytułu i godności Doktora *Honoris Causa*

Zainteresowania, wiedza i kompetencje Profesora Janusza Mroczi związane są z takimi dziedzinami i specjalnościami jak: elektronika, optoelektronika, fizyka, biologia, matematyka i filozofia nauki, szczególności metrologia, fizyka ciała stałego, metody analizy sygnałów, równania całkowe, procesy stochastyczne, czy też wybrane działy bioinżynierii. Ta interdyscyplinarność pozwala Panu Profesorowi na realizację bardzo nowatorskich, międzydziedzinowych badań o szerokim spektrum tematycznym. Ponadto Pan Profesor skutecznie tworzy silne merytorycznie zespoły badawcze, które potrafią rozwiązywać bardzo złożone problemy naukowe i aplikacyjne.

Tak jak już wspomniałem, Jego zainteresowania naukowe koncentrują się wokół kilku zasadniczych problemów takich jak metodologia procesu poznawczego, pomiary pośrednie źle uwarunkowane numerycznie, algorytmizacja problemu odwrotnego, metodologia łączenia danych pomiarowych o różnej przestrzennej rozdzielczości



z wykorzystaniem deterministycznych i stochastycznych metod przetwarzania (fuzja danych), analiza spektralna i polaryzacyjna promieniowania rozproszonego w opisie właściwości układów dyspersyjnych, opracowanie metody momentów w tych układach, badanie procesu spiekania mikro- i nanocząsteczek i tworzenie algorytmów generacji agregatów fraktalnych, a także wykorzystanie reprezentacji czasowo-częstotliwościowych sygnałów w przetwarzaniu danych pomiarowych. Aktualnie Profesor Mroczka prowadzi badania naukowe i publikuje prace w takich obszarach nauki jak: opracowywanie metod obrazowania optycznego i przetwarzania danych pomiarowych w trójwymiarowej przestrzeni i ich fuzja na potrzeby bezstratnego kodowania obrazów oraz związana z tym wielocznikowa fuzja danych o różnej rozdzielczości z wykorzystaniem deterministycznych i stochastycznych metod ich przetwarzania na rekonstrukcję o wyższej jakości, metodologia obserwacji i eksperymentu, modelowanie dynamicznych obiektów technicznych i biomedycznych z uwzględnieniem modeli o parametrach skupionych i rozłożonych, algorytmizacja problemów odwrotnych, modelowanie pól wielkości fizycznych i ich wykorzystanie w diagnostyce obiektów, analiza spektralna i polaryzacyjna promieniowania rozproszonego w układach dyspersyjnych i ich praktyczne wykorzystanie w ocenie właściwości materiałów kompozytowych, wykorzystanie reprezentacji czasowo-częstotliwościowej do przetwarzania danych pomiarowych i ich praktyczną realizację za pomocą procesorów sygnałowych, metod identyfikacji parametrycznej statycznych i dynamicznych modeli złożonych obiektów wraz z ich praktycznym zastosowaniem w pomiarach właściwości układu oddechowego i krwionośnego człowieka, projektowanie, opracowywanie i optymalizacja komputerowych systemów pomiarowych i informacyjnych do badań naukowych oraz procesów technologicznych, projektowanie i wykonywanie inteligentnych przyrządów pomiarowych z wykorzystaniem techniki mikroprocesorowej oraz opracowywanie systemów zdalnego nadzoru medycznego współpracujących z inteligentnym domem, nadzorujących bezpieczeństwo i stan zdrowia mieszkańców,

czy też wykorzystanie metod sztucznej inteligencji do pozyskiwania informacji ilościowych i jakościowych z danych pomiarowych.

W ramach swojej działalności naukowej Profesor Mrocza w 2000 r. założył na Politechnice Opolskiej na Wydziale Elektrotechniki i Automatyki grupę naukową zajmującą się cyfrowym przetwarzaniem sygnałów. W 2002 r. do tworzonego zespołu, w którym znajdowało się już dwóch Jego wychowanków, dołączył kolejny Jego uczeń, który wywodził się z Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej, zaś w 2006 r. magistrantka Profesora, absolwentka Wydziału Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej. Prace, które były realizowane w tym zespole, do dzisiaj zaowocowały uzyskaniem czterech stopni naukowych doktora i dwóch stopni naukowych doktora habilitowanego, zaś tematyka prac zespołu obejmuje cztery zasadnicze obszary, tj.: analizę i pomiary zakłóceń występujących w sieciach elektroenergetycznych, zastosowanie analiz czasowych, częstotliwościowych oraz czasowo-częstotliwościowych w badaniach jakości energii elektrycznej, konstrukcję wbudowanego sprzętu pomiarowego opartego o nowoczesne jednostki obliczeniowe typu procesory aplikacyjne, procesory sygnałowe, układy FPGA i mikrokontrolery, oraz zastosowanie zaawansowanych analiz cyfrowego sygnału do badania sygnałów biomedycznych. Prace zespołu skupiają się na poszukiwaniu zaawansowanych metod analizy oraz cyfrowego przetwarzania sygnałów, które z uwagi na swoją złożoność obliczeniową nie były wcześniej powszechnie stosowane w tym obszarze naukowym. Zespół, w ciągu już kilkudziesięciu lat swojego istnienia, podejmował wiele inicjatyw naukowo-organizacyjnych, opublikował wiele artykułów w czasopismach o zasięgu międzynarodowym i krajowym, m.in. *Metrology and Measurement Systems*, *IEEE Transactions on Power Delivery*, czy też *Energy Spectrum*. Wyniki badań prezentowane były na prestiżowych międzynarodowych konferencjach, takich jak International Conference on Harmonics and Quality of Power, International Conference on Electrical Power Quality and Utilisation, International Scientific Conference – Electric Power Engineering,

czy też International Conference on Renewable Energies and Power Quality. Członkowie zespołu uczestniczą także w pracach Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej Polskiej Akademii Nauk. Obecnie w zespole Pana Profesora rozwija się kolejne pokolenie młodych naukowców, zgromadzone wokół zainspirowanej przez Niego tematyki, poszerzając ją o nowatorskie, *state-of-the-art* zagadnienia informatyczne w systemach wbudowanych oraz problematykę automatyki trakcji kolejowej.

Podobnie inspirujące działania posiada na swoim koncie Professor Mrocza w odniesieniu do prac realizowanych przy współpracy z Politechniką Lubelską, gdzie wspólnie realizowane są prace dotyczące problematyki czujników światłowodowych i ich zastosowań w kontroli wybranych parametrów procesów technologicznych, diagnostyce obiektów, czy też charakteryzacji w czasie rzeczywistym różnych parametrów obiektów technicznych.

W momencie sporządzania tej opinii (tj. w kwietniu 2021 r.) Professor Janusz Mrocza jest autorem/współautorem **446** publikacji, wśród nich **144** z listy filadelfijskiej, współautorem **13** książek (5 zagranicznych, 8 krajowych), **8** patentów (4 wdrożenia), **145** referatów konferencyjnych, w tym **64** na konferencjach międzynarodowych, kilkudziesięciu recenzji artykułów z listy filadelfijskiej, **6** recenzji monografii i książek. Liczba cytowań Jego prac, będąca wskaźnikiem odbioru w świecie prac publikowanych przez Pana Profesora Mroczkę, wynosi **1542** wg bazy WoS, **1791** wg bazy Scopus i **2291** wg bazy Google Scholar, natomiast *indeks Hirscha* $h = 26$ dla WoS, $h = 27$ dla Scopus, $h = 31$ dla Google Scholar).

Pan Profesor opracował **3** recenzje doktoratów Honoris Causa (prof. A. Barella z Barcelony, prof. Z. Hotra ze Lwowa oraz prof. W. Wolińskiego, WAT Warszawa), **58** recenzji wniosków profesorskich, **1** recenzję zagranicznego wniosku profesorskiego (Preston, Anglia), **56** recenzji przewodów habilitacyjnych oraz **22** recenzje prac doktorskich oraz **56-krotnie** pełnił funkcję Przewodniczącego Komisji Habilitacyjnej.

Uczestniczył w realizacji 27 projektów badawczych, w tym zrealizował: 9 projektów badawczych własnych, 2 projekty celowe, 1 projekt rozwojowy, 8 projektów promotorskich i 7 projektów międzynarodowych. W 4 projektach badawczych brał udział jako główny wykonawca, a wyniki badań z 4 projektów zostały wdrożone do praktycznego stosowania.

Wśród wychowanków Pana Profesora ośmiu jest obecnie samodzielny pracownikami naukowymi. Za osiągnięcia naukowe dwóch wychowanków Profesora Mroczonek otrzymało stypendium Fundacji Nauki Polskiej: „Nobel dla młodych”, zaś jeden został wyróżniony nagrodą Wydziału IV PAN. Ponadto trzynastu obroniło z wyróżnieniem prace doktorskie.

Zespół Profesora Janusza Mroczonek realizuje wiele badań naukowych we współpracy z krajowymi i zagranicznymi ośrodkami naukowymi, czego owocem są wspólne publikacje oraz staże naukowe. Zrealizowane w perspektywie kilkudziesięciu lat pracy naukowej badania naukowe w zespole Pana Profesora pozwalają uznać, że jest On twórcą znanej i liczącej się w kraju i za granicą szkoły naukowej metrologii elektronicznej i fotonicznej, zaś Jego działania w tej dziedzinie stanowią szereg znaczących osiągnięć. Profesor w swoich publikacjach i wykładach ukazuje istotne aspekty metrologii, jej aktualne, nurtujące naukowców problemy, nowatorskie osiągnięcia w tej dziedzinie oraz ukryte piękno, zaś w swojej pracy nadal rozwija tę dziedzinę wiedzy. W 2008 r. zapoczątkował wydawanie cyklu książek pt. „Problemy metrologii elektronicznej i fotonicznej”, który systematycznie ukazuje się do dziś pod Jego redakcją. Cykl ten ukazuje najnowsze osiągnięcia polskich uczonych w dziedzinie metrologii, stanowiąc możliwość szerszego zaprezentowania wyników swoich badań, opracowań i przemyśleń na gruncie szerszego forum naukowego. Jest on wydawany w formie jednolicie zredagowanego zbioru, często obszernych opracowań naukowych, których twórcami są znane autorytety z tej dziedziny w naszym kraju, ale również zauważani już w środowisku młodzi naukowcy, reprezentujący na wczesnym poziomie kariery wysoki poziom merytoryczny

w swoich opracowaniach. Seria cieszy się dużym uznaniem także za granicą. Tak przyjęta forma pozwala propagować w szerokim gronie naukowym najlepsze badania związane z metrologią, które są prowadzone w naszym kraju, przedstawiając przy tym i propagując właściwe modele oraz dając wykładnię poziomą i sposobu prowadzenia badań naukowych, przez co opracowanie to może być również użyte do doskonalenia i kształtowania postaw młodych naukowców.

Ponadto uznanie, jakim cieszy się za granicą, pozwoliło Profesorowi Mrocze wprowadzić czasopismo *Metrology and Measurement Systems* na listę filadelfijską i na listę Ministerstwa Edukacji i Nauki (aktualnie 100 pkt.). Taka pozycja czasopisma w obszarze nauk technicznych jest niezaprzeczalnie dużym sukcesem.

Dorobek naukowy Profesora Janusza Mroczy jest bardzo bogaty, zaś jego aktywność, którą starałem się w skrócie nakreślić w tej opinii, przez cały okres Jego kariery naukowej pozwala uznać, że jest to imponująca aktywność naukowa.

Osiągnięcia w zakresie opieki naukowej i dydaktycznej

W swojej działalności dydaktycznej i wychowawczej Pan Profesor konsekwentnie propaguje rozwój naukowy młodych pracowników i traktuje tę działalność jako kluczową przesłankę dla rozwoju nauki, twierdząc, iż rozwój uczelni zależy przede wszystkim od ludzi, a rozwój polskiej nauki ma miejsce na jej najniższych szczeblach organizacyjnych, w grupach naukowych, zespołach i katedrach. To tam prowadzi się badania naukowe, rozważa jej istotne problemy i kształci młodych adeptów nauki. W kierowanej przez siebie katedrze w istotny sposób rozwinął zaplecze i bazę aparaturową oraz wiele nowatorskich i bardzo interesujących wątków badawczych. Ponadto odbywają się w niej systematycznie stałe seminaria naukowe, w ramach których prezentowane są prace młodych, wyróżniających się studentów, doktorantów i pracowników. W ramach tych działań młodym adeptom nauki wpaja się przekonanie, że nauka wymaga czasu i cierpliwości, „skrótów” naukowe nie mogą występować w nauce oraz czas właściwej oceny przyszłych osiągnięć naukowca może być długi, czasem potrafi być dłuższy niż jedno życie i tylko

osoby myślące strategicznie, długofalowo w takiej skali czasowej mogą w pełni realizować swoje plany naukowe oraz zrealizować najważniejszą misję każdego naukowca szerzenia wiedzy i kształtowania postaw swoich następców. Profesor Mrocza w trakcie swojej całej kariery naukowej potwierdza te działania, przekazując młodemu adeptom nauki własne doświadczenia naukowe, uczy formułowania myśli naukowych, przejawia troskę o zachowanie krytycyzmu, ale również prawa do odrębności poglądów. Wpaja swoim młodemu następcom twórczy niepokój w poszukiwaniu obiektywnej prawdy, wrażliwość aksjologiczną, ale i krytycyzm w działaniach badawczych.

Profesor Mrocza w latach 1991–1996 piastował stanowisko Dyrektora Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej. W tym czasie założył specjalność dydaktyczną o nazwie Aparatura Elektroniczna, która jest jedną z najbardziej popularnych specjalności naukowych wśród studentów na kierunku Elektronika. W konsekwencji dla przyszłych pracodawców stała się ona kuźnią młodych talentów, najlepszych absolwentów, którzy są poszukiwani na rynku pracy w całym kraju.

Od 1997 r. Profesor Mrocza wspiera naukowo i dydaktycznie Wydział Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Opolskiej, prowadząc wykłady z zakresu cyfrowego przetwarzania sygnałów. W ramach tych wykładów stworzył podwaliny samodzielnej grupy naukowej, o której wcześniej wspominałem, prowadzącej badania w zakresie zastosowań zaawansowanych metod cyfrowego przetwarzania sygnałów w wielu obszarach techniki i technologii. Ponadto prowadził autorskie wykłady na kierunkach Automatyka i Robotyka, Elektronika i Telekomunikacja oraz Informatyka. Te działania, na przestrzeni kilkudziesięciu lat, intelektualnie ukształtowały kilka pokoleń studentów i doktorantów, umożliwiły wypromowanie ponad czterdziestu dyplomantów oraz pozwoliły na zbudowanie silnego zespołu, który zajmuje się nowoczesną tematyką badawczą i aktywnie współpracuje z krajowymi i zagranicznymi ośrodkami badawczymi. Owocem działań naukowych Profesora stały się między innymi

wspólne doktoraty prowadzone z francuskimi ośrodkami naukowymi, których prekursorem, jeszcze w latach 90-tych ubiegłego wieku, był właśnie Pan Profesor Mrocza. Wypromowanie czterech doktorantów przez Profesora Mroczkę we współpracy z ośrodkami francuskimi, wszystkich prac obronionych z wyróżnieniem, świadczy więc o bardzo nowatorskiej tematyce badań, światowym poziomie rezultatów, umiejętnościach Pana Profesora w poszukiwaniu warsztatu naukowego oraz właściwym doborze młodych talentów naukowych, predysponowanych w sposób naturalny do kariery akademickiej. Ostatni z tych doktoratów otrzymał nagrodę im. Marii Skłodowskiej-Curie za najlepszy doktorat w Europie w danej dyscyplinie. W swojej karierze Pan Profesor Mrocza wypromował dwudziestu sześciu doktorów oraz sprawował opiekę naukową nad ośmioma habilitantami.

Jego aktywność dydaktyczna, w ramach której prezentuje pogląd, iż zawód nauczyciela akademickiego zobowiązuje do spełnienia wymagających kryteriów moralnych i etycznych przy przekazywaniu wiedzy i doświadczenia naukowego, została zauważona i doceniona w 2005 r. przez Fundację Nauki Polskiej, która nagrodziła Pana Profesora subsydlum profesorskim „Mistrz”.

Do najważniejszych osiągnięć Profesora Mroczki w działalności dydaktycznej należy utworzenie w Wydziale Elektroniki, wspomnianej wcześniej, specjalności Aparatura Elektroniczna oraz jej konsekwentna aktualizacja do jak najwyższych standardów kształcenia przez wiele lat. W trakcie tych kolejnych aktualizacji Profesor dostosowywał tematykę tej specjalności do potrzeb zmieniającego się rynku pracy i oczekiwań absolwentów, po to aby zapewnić młodym ludziom większą szansę dalszego rozwoju i możliwość sprostania wyzwaniom bardzo wymagającego rynku pracy.

Profesor Mrocza w swojej karierze szereg badań naukowych prowadzi we współpracy z zagranicznymi ośrodkami naukowymi. Owocem osobistych kontaktów Profesora i tej współpracy są, wcześniej wspomniane, obrony czterech prac doktorskich, wspólne publikacje rezultatów badań oraz staże naukowe odbywane przez

doktorantów i studentów. Na przestrzeni lat współpraca ta dotyczyła takich ośrodków naukowych jak: Department of Engineering and Product Design, University of Central Lancashire (Preston, Wielka Brytania), Institut National des Sciences Appliquées (Rouen, Francja), Department of Biomedical Engineering, Boston University (Boston, USA), Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels (Marsylia, Francja), Université Libre de Bruxelles (Bruksela, Belgia), Auckland Bioengineering Institute, The University of Auckland (Auckland, Nowa Zelandia), Dipartimento di Ingegneria Dell'Innovazione, University of Salento (Lecce, Włochy), Department of Electrical Engineering, Systems and Automation, Ghent University (Ghent, Belgia) oraz utrzymuje kontakty naukowe z: Dipartimento de Elettronica e Informatica, University of Padova (Włochy), Physiologie Respiratoire et Sportive, Hôpital Charles-Nicolas (Rouen, Francja), Centre for Modelling and Information in Medicine, City University (Londyn, Wielka Brytania), Royal Brompton National Heart and Lung Hospital (Londyn, Wielka Brytania).

W swojej karierze naukowej Profesor Mroczyński był promotorem 26 prac doktorskich (4 ukończone we Francji z wyróżnieniami, w tym wspomniana praca, która otrzymała nagrodę im. M. Skłodowskiej-Curie jako najlepszy doktorat w danej dyscyplinie w Europie. Wśród Jego podopiecznych jeden jest profesorem w University of Central Lancashire, Preston, Anglia (prof. B. Matuszewski), prof. J. Borkowski jest zastępcą Profesora Mroczyńskiego jako kierownik Katedry, zaś sześciu innych jest samodzielnymi pracownikami zatrudnionymi na stanowisku profesora, w tym dwóch w Politechnice Opolskiej. Profesor sprawował ponadto opiekę nad przygotowaniem 8 habilitacji, recenzował 3 wnioski o nadanie Doktora *Honoris Causa*, 58 wniosków profesorskich (1 zagraniczny), 56 habilitacje, 22 doktoratów, przewodniczył 56 komisjom habilitacyjnym, a także wypromował ponad 200 dyplomantów. Te imponujące dane, związane z promowaniem rozwoju naukowego kandydatów do wyższych stopni i tytułu naukowego, wynikają z faktu pełnienia z wyboru funkcji członka Centralnej Komisji ds. Stopni i Tytułów Naukowych w latach 2013



do 2020 r. Od 1996 r. często powoływany był także na superrecenzenta Centralnej Komisji.

Profesor Janusz Mroczka otrzymał w 2019 r. godność Doktora *Honoris Causa* Wojskowej Akademii Technicznej za znaczny wkład w rozwój kadry naukowej naszej Uczelni oraz w zakresie współpracy badawczej. Swoją współpracę z Wojskową Akademią Techniczną rozpoczął już w 1996 r., kiedy to podjął współpracę z Wydziałem Elektroniki Wojskowej Akademii Technicznej, natomiast wiele lat później takie same działania rozpoczął w relacjach z Instytutem Optoelektroniki. Zasługi Profesora Janusza Mroczki na rzecz Wojskowej Akademii Technicznej koncentrują się zarówno w obszarze rozwoju kadry naukowej, jak również w obszarze badań naukowych, oraz uczestniczeniu w działaniach organizacyjnych prowadzonych w obszarze metrologii.

Profesor Janusz Mroczka współpracując od wielu lat z zespołami naukowymi Wojskowej Akademii Technicznej był powoływany do recenzowania rozpraw doktorskich i habilitacyjnych oraz do opiniowania wniosków o nadanie tytułu profesora pracownikom naukowym WAT. Brał udział w opiniowaniu wniosku o uzyskanie uprawnień do nadawania stopnia doktora habilitowanego w dyscyplinie elektronika, o jakie starał się Instytut Optoelektroniki WAT. Ponadto zachęcał środowisko naukowe WAT do aktywnego angażowania się w działalność na rzecz komitetów naukowych, czego wynikiem są między innymi: liczne reprezentacje pracowników WAT w Komitecie Metrologii i Aparatury Naukowej PAN (8 samodzielnych pracowników WAT w kadencji 2020–2023, na 41 wszystkich członków Komitetu). Poprzez realizację wspólnych projektów badawczych, konferencje i seminaria rozwinął szeroką i owocną współpracę Wydziału Elektroniki Politechniki Wrocławskiej i Wojskowej Akademii Technicznej. W dalszym ciągu aktywnie wspiera Wojskową Akademię Techniczną w rozwoju kadry naukowej, upowszechnianiu dorobku naukowego oraz w podejmowaniu nowych, interesujących tematów badawczych, zaś poprzez swoje działania w pozytywny

sposób wspiera WAT w kreowaniu wizerunku Wojskowej Akademii Technicznej jako znaczącej i prestiżowej uczelni technicznej, np. poprzez silny głos WAT w komisjach PAN (KMİAN i AMU).

Profesor Janusz Mrocčka, wraz z grupą swoich wychowanków i doktorantów, aktywnie uczestniczy w organizacji konferencji naukowych organizowanych przez jednostki Wojskowej Akademii Technicznej oraz bierze w nich aktywny udział. Są to: Kongres Metrologii odbywający się w cyklu 3-letnim, konferencja MWK – Metrologia Wspierana Komputerowo odbywająca się w cyklu 2-letnim, sympozjum Modelowanie i Pomiary w Medycynie odbywające się w cyklu 2-letnim.

Zasługi dla Akademii Górniczo-Hutniczej

im. Stanisława Staszica

Związki Profesora Janusza Mrocčki z Akademią Górniczo-Hutniczą trwają od końca lat 90-tych XX wieku. W okresie ponad 23 lat Profesor Mrocčka podejmował liczne działania na rzecz rozwoju naukowego tej Uczelni, rozwoju młodej kadry naukowej oraz jej promocji w środowisku krajowym i zagranicznym. W szczególności Profesor przyczynił się w sposób istotny do:

- stworzenia korzystnych warunków do dalszego rozwoju naukowego Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej (EAIiB), poprzez sprawne przeprowadzenie procesu opiniowania wniosków o przyznanie Wydziałowi uprawnień do nadawania stopnia doktora i doktora habilitowanego w dyscyplinie elektronika;
- rozwoju kadry naukowej poprzez udział w wielu procesach awansowania naukowego pracowników Akademii (doktoratach, habilitacjach oraz tytułach profesorskich), w tym wyboru pięciu pracowników Akademii w 2015 r. na członków Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej PAN, jeden z nich wybrany z rekomendacji prof. Janusza Mrocčka został przewodniczącym Komitetu;
- promowania Uczelni w krajowym środowisku naukowym poprzez wspieranie merytoryczne i udział w komitetach naukowych łącznie w 32 konferencjach organizowanych przez Wydział EAIiB.



- Ponadto Profesor Mroczka był propagatorem idei zorganizowania w Akademii Górniczo-Hutniczej Kongresu Metrologii w 2007 r. Zorganizowanie Kongresu stanowiło istotny wkład w promocję Wydziału i Uczelni. Wzięło w nim udział ok. 250 uczestników z krajowych i zagranicznych środowisk naukowych. W program Kongresu zostały włączone obchody 50-lecia Katedry Metrologii;
- nawiązania współpracy (poprzez swojego wychowanka, prof. B. Matuszewskiego) z University of Central Lancashire, Preston, Wielka Brytania, która doprowadziła do realizacji wspólnie z Akademią Górniczo-Hutniczą dwóch grantów pt. „Metrology Guided Radiotherapy” oraz „Engineering and Computational Science for Oncology Network (ECSON)”, co w istotny sposób przyczyniało i rozślawiało Akademię jako merytorycznego naukowego partnera za granicą.

Wniosek końcowy

Prof. Janusz Mroczka jest członkiem społeczności akademickiej Politechniki Wrocławskiej uprawiającym swój zawód nauczyciela akademickiego od czterdziestu pięciu lat. Niewątpliwie jest bardzo aktywnym naukowcem, badaczem, wykładowcą, uczonym dużego formatu, utalentowanym i pracowitym, posiadającym zdolności w wielu obszarach nauki i techniki. Jest bardzo efektywnym organizatorem w obszarze nauki i dydaktyki. W pracy naukowo-badawczej potrafi konsekwentnie dążyć do wyznaczonych celów, przewyższając pojawiające się trudności i przeciwności. Jest uznanym autorytetem w zakresie metrologii elektronicznej i fotonicznej, zaś w środowisku nauk technicznych należy do grona znanych i wybitnych osobowości.

Profesor Janusz Mroczka znany jest z poszanowania i przestrzegania norm etycznych w nauce, dążenia do utrzymania wysokich standardów naukowych, dydaktycznych i moralnych kandydatów do wyższych stopni i tytułu naukowego, którzy są przedstawicielami polskiej nauki. Wielokrotnie byłem świadkiem tego podejścia, reprezentowanego przez Profesora, w trakcie komisji habilitacyjnych, którym przewodniczył Profesor Mroczka i wskazywał, jak wnikliwie

i profesjonalnie, a zarazem życzliwie, dokonywać oceny każdego kandydata, zwracając uwagę na merytoryczne aspekty jego/jej dorobku naukowego.

Jest człowiekiem otwartym, z dużym poczuciem humoru i dystansem do samego siebie. Profesor Mrocza jest osobowością wyjątkowo kreatywną, pełną entuzjazmu w działaniach zarówno codziennych, jak i tych zaplanowanych na wiele lat. W Jego sposobie bycia można odnaleźć klimat świata nauki, zaś Jego wykłady, często pełne ciekawych dygresji, ocierających się niekiedy o rozważania filozoficzne, są dla słuchaczy źródłem intensywnych przemyśleń. Pod wieloma aspektami jest dla młodych adeptów nauki wzorem do naśladowania i wskazuje dobre postawy akademika.

Jednocześnie, co miałem możliwość osobiście zaobserwować podczas Jego wykładów, szczególnie tych związanych z nadawaniem godności Doktora *Honoris Causa*, jest człowiekiem wrażliwym i refleksyjnym, często wspominającym swoją rodzinę, która jest dla Niego najważniejsza i jest ostoją oraz wsparciem we wszystkich Jego działaniach, a także źródłem Jego motywacji.

Jestem przekonany, że działalność naukowa, osiągnięcia dydaktyczne i organizacyjne, a także autorytet w środowisku akademickim, uznanie, jakie Profesor Janusz Mrocza osiągnął w roli członka społeczności akademickiej, nie tylko w kraju, ale i za granicą, bardzo wysoki poziom moralności i walory etyczne, jakie prezentuje Pan Profesor, w pełni uzasadniają zainicjowanie działań Senatu Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie, o wyróżnienia Pana Profesora godnością Doktora *Honoris Causa* tej Uczelni. To właśnie tymi faktami życia naukowego i przymiotami osobowości pragnę rekomendować Profesora Janusza Mroczkę, jednego z tych Najlepszych, Najwybitniejszych, o których wspominałem na początku, do tego akademickiego zaszczytu.

15 maja 2021 r.



Podziękowanie

Z pełną wdzięczności radością pragnę podziękować za otrzymaną godność, która jest dla mnie wielkim darem wspólnoty akademickiej Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie.

Magnificencjo, Panie Rektorze, na Pańskie ręce składam podziękowania dla całej wspólnoty; Wysokiemu Senatowi Akademii Górniczo-Hutniczej dziękuję za przychylność dla procedury przewodu i uchwałę nadającą mi tytuł doktora honoris causa. Dziękuję Panu Profesorowi Januszowi Gajdzie za podjęcie się roli Promotora w honorowym przewodzie. Panom Profesorom: Piotrowi Kisale z Politechniki Lubelskiej i Przemysławowi Wachulakowi z Wojskowej Akademii Technicznej im. Jarosława Dąbrowskiego w Warszawie – za wsparcie swoimi przychylnymi recenzjami. Panu Dziekanowi Profesorowi Ryszardowi Sroce i Radzie Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej AGH – za zainicjowanie nadania mi tej godności

Pozwolę sobie w tym miejscu wyrazić moją wdzięczność tym nielicznym spośród bardzo wielu. W pierwszej kolejności zwracam się do mojej Małżonki, Ewy, która jest mi najbliższym przyjacielem i towarzyszką życia w najlepszych, ale i najtrudniejszych sytuacjach życiowych, i do moich dzieci, Wojciecha, Justyny i Rafała. To Wy w największym stopniu uczestniczyliście w kosztach moich sukcesów życiowych i jesteście współtwórcami nie tylko dzisiejszego mojego wyróżnienia. To Wasza wyrozumiałość i miłość pozwoliły mi żyć nauką. Za Waszą wspaniałomyślność dla mojej egoistycznej izolacji od Was najserdeczniej przepraszam, a za okazaną pomoc i Wasze wyrzeczenia dla mnie z całego serca dziękuję. Bez Waszej

cierpliwości i miłości nie byłoby mnie tutaj dzisiaj. Nie sposób w tym miejscu nie wspomnieć moich Rodziców, którzy dali mi życie i od najmłodszych lat zaszczepiali we mnie podstawowe cechy moralności, które sprzyjały mojemu rozwojowi. Przygotowanie do samodzielnego życia i ukształtowanie mojej osobowości zawdzięczam nie tylko Rodzicom, ale również nauczycielom, którzy uczestniczyli w całym moim procesie edukacyjnym przez wiele lat. Z pełnym uznaniem i wdzięcznością wspominam wielu z moich nauczycieli i wychowawców. Byli to ludzie dobrze przygotowani do pracy pedagogicznej. Nie kierowali się panującą modą na określone tematy (społeczne, polityczne itp.). Osobowość moich nauczycieli harmonizowała z deontologią typową dla przedstawicieli środowisk niepodległościowych. W swojej aktywności zawodowej dawali wyraz przeświadczeniu, że zawód nauczyciela zobowiązuje ich do realizacji wzniosłych norm moralnych. Swoją pracę traktowali jako misję, którą spełniali na rzecz niezależności polskiej kultury. Dbałością o te ideały i stanowczością głoszonych tez, obowiązkowością, systematycznością, gorliwością kształtowali nasze osobowości. Życiem wypełnionym czynem tworzyli surową szkołę moralną, a ich szlachetność, inteligencja, odwaga uczyła nas pokory i poszanowania dla pracy i drugiego człowieka.

Dziękuję za życzliwość społeczności akademickiej Akademii Górniczo-Hutniczej, która nadając mi ten tytuł, przyjęła mnie do swojej wspólnoty i grona swoich doktorów honoris causa. Jestem niezwykle wdzięczny za to wyróżnienie. Przy okazji odwiedzin na AGH dane mi było zaobserwować ofensywną, odważną i zorientowaną na przyszłość i młodość strategię Waszej uczelni. Moje słowa podziękowania wiąże ze zobowiązaniem służenia Waszej i teraz już mojej Alma Mater w jej rozkwicie i aspiracjach. Składam moje głębokie homagium wobec Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie.

Dziękuję za laudację i recenzję, w których oprócz oceny mojego dorobku naukowego i zasług na rzecz Akademii Górniczo-Hutniczej podjęto próbę opisu mojej osobowości, ukazania szerszemu gronu



mojego procesu wyrastania ponad siebie jako odruchu etycznego i empatycznego. To wzruszające, bo dokonują tego ci, którym ja przed laty pomagałem i doradzałem – mógłbym powiedzieć: moi wychowankowie. Dokonują tego w czasie kryzysu, w którym próbujemy się odnaleźć i któremu pragniemy się przeciwstawić, aby nie sprowadzić świata do statusu przedmiotu, który można rozdrapywać, dzielić, konsumować i niszczyć, jedynie zaspokajając swoje potrzeby. Nie pozwólmy światu umrzeć! Zastanówmy się, czy nie pogubiliśmy się w jego rozumieniu.

Serdecznie dziękuję dostojnym gościom, którzy zaszczylili swoją obecnością tę uroczystość. Dziękuję przedstawicielom środowiska akademickiego z kraju, przedstawicielom Polskiej Akademii Nauk, członkom byłej Centralnej Komisji ds. Stopni i Tytułów, członkom Rady Doskonałości Naukowej, moim przełożonym z Politechniki Wrocławskiej, a w szczególności moim współpracownikom z Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej.

Pragnę gorąco podziękować tym wszystkim, którzy tak wspierali i rzetelnie przygotowali tę uroczystość.

Moją osobowość ukształtowały różne interakcje z różnymi ludźmi, od wielu z nich czerpałem wiedzę, od innych doświadczenie życiowe, od innych poczucie humoru i zwyczaj dystansowania się od siebie. Nie sposób wymienić tego wszystkiego, co obcowanie z drugim człowiekiem daje każdemu z nas. Dzisiaj mogę powiedzieć, że to ci ludzie są anonimowymi współautorami mojego sukcesu.

Bądźcie Państwo pewni, że tak jak Wy tu dzisiaj obecni łączycie się ze wzruszeniem, które mi towarzyszy, tak ja w chwilach dla Was podobnych będę z Wami.

To wyróżnienie dopełnia moje życie naukowe, jednocześnie w dyskretny sposób ukazując moje w nim przemijanie, nagrody bowiem otrzymuje się po. W dotychczasowym życiu przeszedłem wiele dróg i jak zauważyliście, byłem na nich czasami sam, a czasami z Wami, ale zawsze przemierzałem je po swojemu. To nadzieja i wiara w ludzką sprawczość pozwalały mi żyć i pomagać drugim w odkrywaniu prawdy, którą skrywa przed nami natura.

Czuję się człowiekiem szczęśliwym i naukowo spełnionym, bo to, co mnie spotkało, przeżywam w gronie moich przyjaciół i osób mi bliskich. Jestem przepełniony życzliwością i wdzięcznością wobec ludzi, których tu spotkałem, którym pomagałem i doradzałem i z którymi dane mi było współpracować. Wasza przychylność i hojność dopełniają moje szczęście.

Janusz Mrocza



Prof. dr hab. inż. Janusz Mroczka

**Matematyczne uwarunkowania
problemu odwrotnego
w pośrednich pomiarach rozkładu wielkości
cząstek układów dyspersyjnych**



SPIS TREŚCI

Wprowadzenie	63
1. Pomiary pośrednie wielkości fizycznych	65
1.1 Zagadnienie wprost i odwrotne	66
1.2 Równanie całkowe Fredholma	69
2. Zarys analizy wielkości cząstek układów dyspersyjnych	73
2.1 Rozpraszanie światła w układach dyspersyjnych	73
2.2 Opis cząsteczek fazy zdyspergowanej	76
2.3 Metody pomiarowe	77
<i>Pomiary nefelometryczne 78 · Pomiary turbidymetryczne 79</i>	
2.4 Modele matematyczne pomiarów nefelometrycznych i turbidymetrycznych	80
<i>Pomiary nefelometryczne 83 · Pomiary turbidymetryczne 83</i>	
3. Zagadnienie odwrotne w analizie optycznej wielkości cząstek układów dyspersyjnych	84
3.1 Niewłaściwe postawienie zagadnienia odwrotnego	84
3.2 Słabe uwarunkowanie zagadnienia odwrotnego	86
4. Numeryczne metody rozwiązywania zagadnienia odwrotnego w analizie optycznej wielkości cząstek układów dyspersyjnych	92
4.1 Dyskretyzacja zagadnienia odwrotnego	92
4.2 Rozwiązanie NK z minimalną normą zagadnienia odwrotnego w dyskretnej postaci	94
4.3 Słabe uwarunkowanie zagadnienia odwrotnego w dyskretnej postaci	100
4.4 Regularyzacja zagadnienia odwrotnego w dyskretnej postaci	104
<i>Zasada rozbieżności 113 · Kryterium krzywej L 114 ·</i> <i>Uogólniona walidacja wzajemna 116</i>	
4.5 Nieliniowe iteracyjne metody inwersyjne	117
4.6 Bayesowska metoda rozwiązania zagadnienia odwrotnego w postaci dyskretnej wykorzystująca procedurę Monte-Carlo	125
Podsumowanie	130
Literatura	131



WPROWADZENIE

Najpiękniejszą rzeczą, jakiej możemy doświadczyć, jest oczarowanie tajemnicą. Jest to uczucie, które stoi u kolebki prawdziwej sztuki i prawdziwej nauki. Ten, kto go nie zna i nie potrafi się dziwić, nie potrafi doznawać zachwyty, jest martwy, niczym zdmuchnięta świeczka.

ALBERT EINSTEIN

Kierując się moją osobistą pasją naukową i praktycznymi doświadczeniami, postanowiłem poświęcić karty niniejszego opracowania wybranym matematycznym i fizycznym aspektom metody posługującej się światłem rozproszonym w nieinwazyjnych badaniach wielkości cząstek układów dyspersyjnych. Układy dyspersyjne to dwu- lub wielofazowe substancje złożone z fazy ciągłej, zwanej fazą rozpraszającą lub ośrodkiem dyspersyjnym, i zawieszonych w niej drobnych cząstek stanowiących fazę rozproszoną, zwaną też fazą zdyspergowaną¹⁻³. Układy dyspersyjne są bardzo powszechne w przyrodzie. Są to np. wody naturalne z zawieszonym w nich planktonem oraz cząstkami nieorganicznymi, krew i kolonie bakteryjne, unoszące się w powietrzu pyły, dymy i mgły, masa perłowa oraz minerały. Układami dyspersyjnymi są również liczne produkty przemysłowe – od artykułów spożywczych takich jak mleko i majonez poprzez leki i kosmetyki w postaci past, kremów, żeli i pianek po materiały budowlane takie jak beton, farby emulsyjne i pianki, a także niektóre materiały kompozytowe. Analiza wielkości cząstek fazy zdyspergowanej ma ogromne znaczenie praktyczne, zaś jakościowa oraz ilościowa analiza cząsteczek fazy zdyspergowanej może być dokonywana przy wykorzystaniu światła jako narzędzia poznawczego, które umożliwia realizację pomiaru nieinwazyjnego w czasie rzeczywistym, z potencjalnie dużą czułością i selektywnością.

Nie zamierzam streszczać ogromnej już dziedziny, jaką jest metrologia układów dyspersyjnych, w którą wpisuje się analiza agregatów cząstek; byłaby to śmieszna ambicja. Moją intencją jest przede

wszystkim ukazanie roli matematyczno-empirycznej metody w tej dziedzinie. W tym celu pragnę przedyskutować modele matematyczne pomiarów nefelometrycznych i turbidymetrycznych, złe postawienie i słabe uwarunkowanie zagadnienia odwrotnego w analizie wielkości cząstek układów dyspersyjnych w oparciu o pomiary nefelometryczne i turbidymetryczne oraz przedyskutować numeryczne metody rozwiązywania tego problemu wykorzystujące różne formy wiedzy apriorycznej o rozwiązaniu.

Moje dotychczasowe doświadczenia w zakresie optycznej i nieinwazyjnej charakterystyki obiektów złożonych obejmują m.in.: problematykę pomiarów wielkości cząstek ośrodków dyspersyjnych metodami optycznymi^{4, 5, 2, 6-8, 3, 9-11}, w tym hybrydowe metody w opisie transmitancji światła w warunkach rozproszenia wielokrotnego dla monodispersyjnego rozkładu wielkości cząstek^{12, 13}, metody inwersyjne wykorzystujące sztuczną sieć neuronową w turbidymetrii spektralnej¹⁴ oraz w spektroskopii absorpcyjnej¹⁵, wykorzystanie spektralnych i polaryzacyjnych właściwości laserowego promieniowania rozproszonego w nieinwazyjnym badaniu materiałów kompozytowych¹⁶⁻¹⁸, nieinwazyjną diagnostykę parametrów optycznych i właściwości rozproszeniowych pełnej krwi i erytrocytów¹⁹, modelowanie matematyczne rozproszenia światła przez cząstki niesferyczne i ich agregaty²⁰⁻²³, modelowanie matematyczne trójwiązkowej anemometrii dopplerowskiej w określaniu położenia i prędkości cząstek w ośrodkach wielofazowych²⁴, nieinwazyjny pomiar *in situ* średnicy homogenicznych i niehomogenicznych przezroczystych włókien wykorzystywanych m.in. w materiałach kompozytowych i jako światłowody telekomunikacyjne i pomiarowe²⁵⁻²⁹, a także praktyczne aspekty wykorzystania światła o niskiej spójności czasowej jako narzędzia w pomiarach^{30, 31}.





POMIARY POŚREDNIE WIELKOŚCI FIZYCZNYCH

Często mówię, że gdy potrafisz zmierzyć to, o czym mówisz i wyrazić to liczbowo, wiesz coś o tym; ale gdy nie możesz tego zmierzyć, gdy nie możesz wyrazić tego liczbowo, twoja wiedza jest skromna i niezadowalająca.

LORD KELVIN

Pomiar jest empirycznym procesem poznawczym, pozwalającym na obiektywne odwzorowanie wielkości fizycznych charakteryzujących obiekt pomiaru w dziedzinę liczb³². Pomiar polega na porównaniu wielkości mierzonej ze wzorcem. W *pomiarach bezpośrednich* wielkość porównywana i wzorcowa są tego samego rodzaju, a wynik pomiaru podawany jest w jednostkach wielkości mierzonej³².

Proces pomiarowy można zapisać za pomocą formalizmu matematycznego następująco:

$$y = f_0(y_0, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \quad 1.1$$

gdzie y oznacza wynik pomiaru, f_0 jest prawdziwym przetwarzaniem realizowanym przez przyrząd, y_0 to wartość prawdziwa wielkości mierzonej oddziałującej na wejście miernika, a $\mathbf{w}$ i $\mathbf{z}$ są wektorami wielkości wpływających kontrolowanych i zakłócających. Ponieważ rzeczywiste odwzorowanie f_0 (tak jak i wartość prawdziwa y_0) nie jest znane, producent przypisuje działaniu przyrządu pewien model matematyczny f_m i zgodnie z nim dokonuje procesu wzorcowania³². Najczęściej stosowane jest odwzorowanie tożsamościowe, tj. $f_m(\xi) = \xi$.

Dodatkowe znaczenie modeli matematycznych uwidacznia się podczas *pomiarów pośrednich*. Bezpośrednie pomiary wielu procesów zachodzących wewnątrz złożonych obiektów naturalnych są niemożliwe. Powodem może być brak odpowiednich elementów pomiarowych (zwłaszcza czujników), fizyczna niemożność umieszczenia elementów systemu pomiarowego w odpowiednich miejscach

obiektu, bądź też uwarunkowania etyczne takich pomiarów. W opisanej sytuacji nieodzowne staje się stosowanie nowoczesnej mikroprocesorowej aparatury elektronicznej, która za pośrednictwem wyspecjalizowanych czujników rejestruje dostępne sygnały fizyczne, przetwarza je na postać cyfrową, a następnie, zgodnie z zaimplementowanymi algorytmami numerycznymi, przelicza na wartości poszukiwanych wielkości.

Pomiary pośrednie polegają zatem na wykorzystaniu związku pomiędzy wielkościami niedostępnymi i tymi, które mogą być mierzone bezpośrednio, dokonaniu pomiaru wielkości dostępnych i obliczeniu wartości wielkości analizowanych. Obliczenia wykonywane są zgodnie z modelem matematycznym h_m związku pomiędzy wielkościami mierzonymi bezpośrednio, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, a wielkością poszukiwaną θ :

$$\theta = h_m(\mathbf{y}). \quad 1.2$$

Najczęściej jest to model matematyczny badanego obiektu lub jego części składowej. Szczególnym przypadkiem są takie pomiary, w których wynikiem obliczeń nie jest jedna liczba, lecz cały szereg wartości. Nazywane są one *pomiarami pośrednimi złożonymi* ³². W takim przypadku stosowane są odpowiednio opracowane algorytmy numeryczne, omówione w dalszych częściach opracowania.

1.1 ZAGADNIENIE WPROST I ODWROTNE

Istotą interpretacji wyników pomiarów jest założenie związku przyczynowo-skutkowego między stanem badanego obiektu a wskazaniami miernika. Tylko wtedy uzyskiwana w wyniku tego procesu liczba (lub liczby) może być traktowana jako źródło wiarygodnej informacji o obiekcie. Zatem rola nawet najprostszych przyrządów pomiarowych polega na wytworzeniu takiego związku i zapewnieniu jego jednoznaczności.

Zaobserwowany lub wytworzony związek przyczynowo-skutkowy, jak to ma miejsce w przypadku urządzeń pomiarowych, stanowi ważny element wnioskowania w nauce, a tym samym w metrologii. Wnioskowanie ilościowe wymaga zastosowania sformalizowanego



opisu tej relacji – stanowią go równania matematyczne. Równania tworzą strukturę modelu matematycznego wyrażającego związek między pobudzeniem (przyczyną) i reakcją (skutkiem). Pobudzenie u traktowane jest jako wejście modelu, a reakcja y_m jako jego wyjście. Wtedy model matematyczny obiektu SISO może być przedstawiony następująco:

$$y_m = f_m(u, \mathbf{\hat{e}}) \quad \text{lub} \quad y_m = g_m(u, \mathbf{\hat{e}}), \quad 1.3$$

gdzie f_m jest modelem toru przetwarzania przyrządu pomiarowego, zaś g_m to model badanego obiektu o wartościach parametrów $\mathbf{\hat{e}}$.

Modele matematyczne stosowane w procesie poznawczym w metrologii można podzielić na fizykomatematyczne modele przyczynowe i modele odwrotne. Podczas opracowywania modelu przyczynowego (*forward model*) analizuje się strukturę obiektu i identyfikuje zachodzące w nim zjawiska. Pozwala to na zaproponowanie równań matematycznych ujmujących jakościowo i ilościowo zaobserwowane związki przyczynowo-skutkowe. Kompleksowe modele przyczynowe obiektów złożonych cechują się zazwyczaj dużym poziomem skomplikowania (uwidaczniającym się w dużej ilości równań i parametrów) i stosowane są przede wszystkim w celu przewidywania zachowań obiektu w określonych warunkach, jak i w analizie zjawisk zachodzących w nim samym (*badania symulacyjne*). Znajdują też zastosowanie jako narzędzie pomocnicze podczas opracowywania modeli odwrotnych. Model odwrotny (*inverse model*) strukturalnie jest o wiele prostszy i umożliwia ilościowe wyznaczanie przyczyn obserwowanych zjawisk na podstawie zarejestrowanych skutków. Z tego powodu stosowany jest przede wszystkim w pośrednich pomiarach właściwości badanych obiektów, jak i w procesie rekonstrukcji sygnałów pomiarowych.

W metrologii o wiele większe znaczenie niż rozwiązywanie zadania wprost ma proces odwrotny, czyli wnioskowanie o przyczynach na podstawie skutków. Proces ten zwany *zadaniem odwrotnym* (*inverse problem*) może przyjmować mniej lub bardziej formalną formę. W tym kontekście warto zauważyć, że wszelkie pomiary nieodłącznie związane są z rozwiązywaniem zadania odwrotnego, gdyż

odczyt z miernika (powiązany z wartością wejściową funkcją przetwarzania nośnika informacji) jest podstawą wnioskowania o stanie wielkości mierzonej. Zasadniczo jednak zadanie odwrotne polega na ilościowym wyznaczeniu przyczyn, gdy znane są skutki (y_m) i struktura modelu obiektu (f_m lub g_m). Stąd powyższy termin obejmuje w metrologii dwa różne zagadnienia: rekonstrukcję sygnałów i estymację parametrów.

Zadaniem *rekonstrukcji* jest odtworzenie sygnału wejściowego u na podstawie sygnału wyjściowego y_m i pełnego modelu związku przyczynowo-skutkowego (tj. struktury f_m i wartości parametrów θ). Wymaga to dokonania przekształcenia odwrotnego modelu względem pobudzenia:

$$u = f_m^{-1}(y_m, \hat{\epsilon}). \quad 1.4$$

W technice pomiarowej zadanie to rozwiązywane jest najczęściej w celu rekonstrukcji sygnału pomiarowego podanego na wejście miernika mikroprocesorowego na podstawie odpowiadających mu próbek zgromadzonych w pamięci urządzenia. Wtedy f_m jest modelem matematycznym toru przetwarzania, a zadanie rekonstrukcji przyjmuje charakter dyskretny.

Drugi rodzaj zadania odwrotnego to *estymacja* parametrów modelu (zwana też identyfikacją parametryczną) polegająca na wyznaczaniu ich wartości w sytuacji, gdy znane jest pobudzenie u , odpowiedź y_m oraz struktura matematyczna g_m . Ponownie wymagane jest dokonanie przekształcenia odwrotnego modelu, tym razem względem θ :

$$\hat{\epsilon} = g_m^{-1}(u, y_m). \quad 1.5$$

W metrologii estymacja parametrów jest równoznaczna z pośrednimi pomiarami złożonymi: g_m jest fizykomatematycznym modelem badanego obiektu, u zarejestrowanym pobudzeniem, a y_m to tzw. „surowe” dane pomiarowe uzyskiwane zazwyczaj w pomiarach bezpośrednich. Wektor parametrów θ reprezentuje mierzone wielkości fizyczne charakteryzujące obiekt pomiaru.



1.2 RÓWNANIE CAŁKOWE FREDHOLMA

Obszerną klasę problemów odwrotnych w analizie właściwości układów dyspersyjnych stanowią zagadnienia, w których struktura modelu obiektu może być wyrażona za pomocą liniowego równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju^{33, 34}:

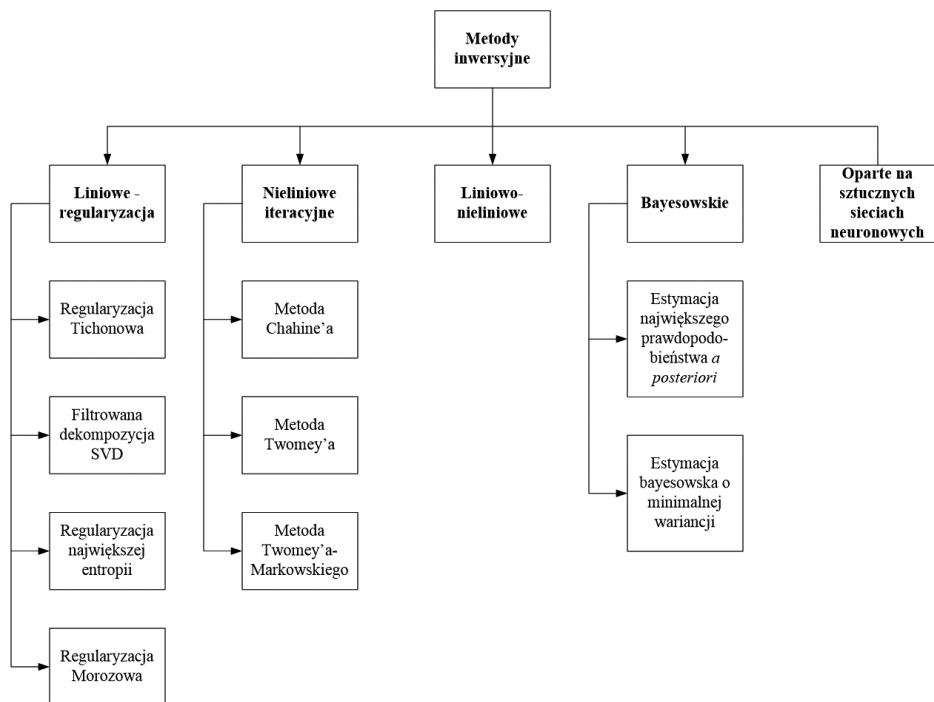
$$g_m = \int_{\Omega} K(y, a) f(a) da, \quad 1.6$$

gdzie $f(a)$ to poszukiwana funkcja rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej, $K(y, a)$ to jądro całkowe, zaś Ω to obszar całkowania w przestrzeni $\mathbb{R}^N$, przy czym punkt $y \in \Omega$. Rozwiązanie równania (1.6) jest złożonym problemem. W szczególności zagadnienie odwrotne dla (1.6) przy przyjęciu określonych warunków granicznych jest z natury źle postawione i słabo uwarunkowane^{35, 34}.

Analityczne rozwiązania równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju znalezione zostały tylko dla nielicznych szczególnych postaci funkcji jądra całkowego $K(y, a)$ ¹, dlatego zagadnienie odwrotne rozwiązuje się typowo z zastosowaniem metod numerycznych. W tym celu równanie (1.6) poddaje się dyskretyzacji, której rezultatem jest układ algebraicznych równań liniowych. W następstwie złego postawienia i słabego uwarunkowania (1.6) otrzymywany układ równań wykazuje bardzo słabe uwarunkowanie numeryczne^{33, 34, 36, 1}.

Dotychczas opracowano wiele numerycznych technik rozwiązywania problemów odwrotnych wyrażonych równaniem całkowym Fredholma pierwszego rodzaju. Każda z tych metod zwanych algorytmami lub procedurami inwersyjnymi wykorzystuje określoną formę wiedzy apriorycznej o poszukiwanym rozwiązaniu w celu minimalizacji efektów słabego uwarunkowania zagadnienia. Ogólną klasyfikację metod inwersyjnych prezentuje Rys. 1.1^{33, 34, 36}.

Metody liniowe poszukują najlepszej aproksymacji operatora odwrotnego do operatora odwzorowującego dyskretną reprezentację funkcji $f(a)$ w dyskretną reprezentację funkcji g_m . Techniki te znajdują uzasadnienie teoretyczne na gruncie analizy funkcjonalnej i algebry liniowej. Są one reprezentowane przez różne odmiany regularyzacji^{32, 33, 35}.



Rys. 1.1. Ogólna klasyfikacja metod inwersyjnych wraz z przykładami technik należących do poszczególnych grup.

Iteracyjne metody nieliniowe znajdują rozwiązanie w toku iteracyjnych poprawek założonego *a priori* rozwiązania początkowego. Korekty te mają charakter nieliniowy. Ich kierunek i wielkość dobierana jest w taki sposób, aby rozwiązania uzyskiwane w kolejnych iteracjach wykazywały coraz lepszą zgodność z danymi pomiarowymi. Dzięki temu proces poprawek jest zbieżny do prawdziwego rozwiązania problemu³⁶.

W rozwiązywaniu zagadnienia odwrotnego stosuje się również sztuczne sieci neuronowe. Sieć uczona jest (poprzez korekcję współczynników wagowych) odwzorowania dyskretnej reprezentacji funkcji $f(a)$ w dyskretną reprezentację funkcji g_m , czyli modelu pomiarów (1.6). Nauczona sieć funkcjonuje jak model odwrotny, tzn.

po podaniu na jej wejście dyskretnej reprezentacji funkcji g_m na jej wyjściu otrzymuje się dyskretną reprezentację funkcji $f(a)$ ³⁷.

Osobną grupę metod inwersyjnych stanowią techniki bayesowskie. W odróżnieniu od wcześniej omówionych procedur nie dokonuje się tu jawnego rozwiązywania zagadnienia odwrotnego. W metodach tych zakłada się pewien rozkład prawdopodobieństwa *a priori* rozwiązania, odzwierciedlający niepewność wiedzy apriorycznej o rozwiązaniu. Następnie rzeczywiste dane pomiarowe wykorzystuje się do skorygowania wiedzy apriorycznej o rozwiązaniu. Odbywa się to poprzez wyznaczenie w oparciu o twierdzenie Bayesa warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa rozwiązania pod warunkiem, że w rezultacie pomiarów uzyskane zostały określone dane pomiarowe. Ten wynikowy rozkład prawdopodobieństwa rozwiązania, zwany rozkładem *a posteriori*, stanowi probabilistyczną informację o rozwiązaniu. Na jego podstawie możliwe jest wyznaczenie różnych estymatorów rozwiązania³⁶. Estymator największego prawdopodobieństwa *a posteriori* oznacza rozwiązanie najbardziej prawdopodobne pod warunkiem zarejestrowania określonych wyników pomiarów³⁶. Estymator bayesowski o minimalnej wariancji stanowi natomiast wartość oczekiwaną rozwiązania pod warunkiem zarejestrowania określonych danych pomiarowych³⁶. Techniki bayesowskie realizowane są praktycznie z wykorzystaniem symulacji Monte Carlo. W tym przypadku w celu uzyskania rozkładu prawdopodobieństwa *a posteriori* rozwiązania dokonuje się analizy statystycznej wielkiej liczby rozwiązań zagadnienia wprost otrzymywanych dla dyskretnej reprezentacji funkcji $f(a)$ losowanych z założonego rozkładu prawdopodobieństwa *a priori*³⁶.

Przy odpowiednich założeniach upraszczających rozwiązanie równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju może posłużyć do wyznaczenia rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej układu dyspersyjnego na podstawie mierzonych charakterystyk rozpraszania światła w układzie dyspersyjnym¹. Do charakterystyk tych należą: zależność objętościowej funkcji rozpraszania od kąta rozpraszania $\beta(\theta)$ będąca przedmiotem pomiarów nefelometrycznych

oraz zależność całkowitego współczynnika osłabienia światła od długości fali rozpraszanego światła $c(\lambda)$, która jest rezultatem pomiarów turbidymetrycznych¹. Przyjmuje się przy tym, że w układzie dyspersyjnym zachodzi jednokrotne i niekoherentne rozpraszanie światła będącego niespolaryzowaną falą płaską. Dzięki temu możliwe staje się sformułowanie modeli matematycznych pomiarów nefelometrycznych i turbidymetrycznych przy użyciu znanych teorii rozpraszania światła na pojedynczej cząstce fazy zdyspergowanej, np. teorii rozpraszania Mie czy dyfrakcji Fraunhofera^{1, 38, 39}.





ZARYS ANALIZY WIELKOŚCI CZĄSTEK UKŁADÓW DYSPERSYJNYCH

*Co wiemy – to tylko kropelka.
Czego nie wiemy – to cały ocean.*

IZAACK NEWTON

Układy dyspersyjne są to układy dwu- lub wielofazowe złożone z fazy ciągłej, zwanej fazą rozpraszającą lub ośrodkiem dyspersyjnym, i zawieszonych w niej drobnych cząstek stanowiących fazę rozproszoną, zwaną też fazą zdyspergowaną¹.

2.1 ROZPRASZANIE ŚWIATŁA W UKŁADACH DYSPERSYJNYCH

Rozpraszanie światła jest zjawiskiem fizycznym polegającym na zmianie przestrzennego rozkładu wiązki światła na skutek oddziaływania z ośrodkiem, w którym to światło propaguje^{37, 13, 12}.

Mechanizm rozpraszania fal elektromagnetycznych polega na pochłanianiu promieniowania padającego przez atomy lub cząsteczki ośrodka, co prowadzi do ich wzbudzenia, a następnie na wtórnym promieniowaniu fal elektromagnetycznych przez te atomy lub cząsteczki przy ich powrocie do niższych poziomów energetycznych. Promieniowanie wtórne stanowi promieniowanie rozproszone w ośrodku^{38, 1}. Część pochłoniętej energii elektromagnetycznej może zostać przekształcona w inne formy energii takie, jak energia cieplna. Zjawisko to nosi nazwę absorpcji.

Promieniowanie rozproszone przez cały układ zawierający olbrzymią liczbę atomów lub cząsteczek jest sumarycznym efektem wtórnego promieniowania elektromagnetycznego emitowanego przez wszystkie atomy lub cząsteczki wzbudzone przez falę padającą^{38, 1}. W ośrodkach, w których odległości pomiędzy atomami lub cząsteczkami są znacznie mniejsze od długości fali światła

padającego, każdy atom lub cząsteczka poddana jest oddziaływaniu nie tylko fali padającej, lecz również wypadkowej wtórnych fal wypromieniowanych przez wszystkie pozostałe atomy lub cząsteczki w układzie. Jednocześnie jednak wtórne promieniowanie każdej molekuly zależy od całkowitego działającego na nią promieniowania. W efekcie mamy do czynienia z wzajemnym sprzężeniem molekuł, co prowadzi do elektromagnetycznego problemu wielu ciał³⁸. Ścisły opis tego zjawiska, określanego jako rozproszenie wielokrotne, jest niezwykle skomplikowany^{38, 40}.

Jeżeli odległości między atomami lub cząsteczkami w ośrodku są większe, można zaniedbać ich wzajemne sprzężenie, przyjmując przybliżenie rozproszenia jednokrotnego. W tej sytuacji wypadkowe pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz ośrodka obliczane jest jako superpozycja pól elektrycznych wtórnych fal elektromagnetycznych emitowanych przez wszystkie wzbudzone molekuly oraz pola elektrycznego fali padającej. Sumowanie pól uwzględnia różnice faz poszczególnych fal. Zakłada się przy tym, że różnice te są stałe w czasie, czyli fale są ze sobą spójne^{38, 1}.

Można wykazać, że w idealnie jednorodnym ośrodku wynikiem superpozycji fal wtórnych jest pojedyncza fala propagująca w ośrodku w kierunku zgodnym z kierunkiem propagacji fali padającej z prędkością c/n , gdzie c jest prędkością światła w próżni, a n współczynnikiem załamania ośrodka. Fala padająca zostaje w ośrodku całkowicie wygaszona. Zatem w przypadku ośrodka jednorodnego mimo występowania molekularnego mechanizmu rozpraszania, nie zachodzi rozpraszanie w skali makroskopowej, przejawiające się zmianą kierunku propagacji światła. Ścisły opis oddziaływań światła z układami jednorodnymi prowadzi do zależności współczynnika załamania od właściwości ośrodka – liczby molekuł w jednostce objętości oraz ich polaryzowalności, czyli skłonności do zmiany rozkładu ładunku elektrycznego pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego³⁸.

Rozpraszanie światła rozumiane jako zmiana przestrzennego rozkładu wiązki występuje wyłącznie w ośrodkach niejednorodnych,



tj. takich, w których współczynnik załamania nie jest jednakowy we wszystkich punktach, lecz zmienia się od punktu do punktu^{38, 1, 12, 13}. W rzeczywistości nawet układy jednorodne z makroskopowego punktu widzenia są określonej skali niejednorodne, ponieważ można w nich wyróżnić pojedyncze atomy lub cząsteczki. Rozważania teoretyczne prowadzą jednak do wniosku, że ośrodki, w których odległości między molekułami są znacznie mniejsze od długości fali światła, można uznać za optycznie jednorodne^{12, 13, 38, 1}.

Przyczyną niejednorodności optycznej ośrodka może być obecność w nim niewielkich cząstek innej substancji^{12, 13, 38, 1}. Przez cząstkę rozumie się agregat wielkiej liczby atomów lub cząsteczek jednego rodzaju. W przypadku, gdy liczba ta jest wystarczająco duża, właściwości optyczne materiału, z którego cząstka jest zbudowana, opisuje współczynnik załamania światła. Niejednorodność optyczna tego typu występuje w przypadku układów dyspersyjnych, gdyż faza zdyspergowana tych układów stanowi zbiór cząstek o współczynniku załamania różniącym się od współczynnika załamania ośrodka dyspersyjnego, w którym te cząstki są zawieszone¹.

Podobnie jak w omawianym wcześniej przypadku atomów lub cząsteczek, jeżeli średnie odległości między cząstkami fazy zdyspergowanej są znacznie mniejsze od długości fali światła padającego, następuje wzajemne sprzężenie cząstek za pośrednictwem pola elektromagnetycznego, co prowadzi do zjawiska rozproszenia wielokrotnego^{38, 1}. Jeżeli średnie odległości cząstek są większe, można zastosować przybliżenie rozproszenia jednokrotnego^{38, 1}. W tej sytuacji pole elektryczne fali rozproszonej przez zbiór cząstek fazy zdyspergowanej stanowi superpozycję pól fal rozproszonych przez poszczególne cząstki (z uwzględnieniem faz), z których każda poddana jest oddziaływaniu wyłącznie pola elektrycznego fali padającej tak, jakby stanowiła pojedynczą cząstkę rozpraszającą w całym ośrodku dyspersyjnym.

Jeżeli dodatkowo założy się, że liczba cząstek w układzie dyspersyjnym jest bardzo duża, a ich położenie i orientacja przestrzenna – losowe i zmienne w czasie, fazy fal rozproszonych przez

poszczególne cząstki w dowolnym punkcie obserwacji są również losowe (nie związane żadną systematyczną zależnością) oraz zmienne w czasie. Dzięki temu cząstki fazy zdyspergowanej można traktować jako niespójne względem siebie źródła promieniowania rozproszonego. W związku z tym natężenia fal rozproszonych przez poszczególne cząstki mogą być bezpośrednio sumowane. Rozpraszanie światła przez cały zbiór cząstek fazy zdyspergowanej określa się w tym przypadku jako rozproszenie niespójne lub niekoherentne^{1, 38}.

Dzięki założeniom o rozpraszaniu jednokrotnym i niekoherentnym możliwe jest łatwe sformułowanie opisu rozpraszania światła w układzie dyspersyjnym na podstawie wyników analizy rozpraszania światła na pojedynczej cząstce fazy zdyspergowanej.

2.2 OPIS CZĄSTECZEK FAZY ZDYSPERGOWANEJ

Jedną z najważniejszych właściwości fizycznych układów dyspersyjnych jest wielkość cząstek fazy zdyspergowanej, ponieważ ma ona zasadniczy wpływ na pozostałe własności układu¹.

Cząstki fazy zdyspergowanej mogą posiadać różny, często nieregularny kształt. Wymaga to sprecyzowania miar wielkości (rozmiaru) cząstek, gdyż w tych warunkach średnica w znaczeniu dosłownym nie może być stosowana jako parametr charakteryzujący wielkość cząstek¹.

W wielu procesach fizycznych zachowanie rzeczywistych cząstek układu dyspersyjnego opisuje się geometriami przybliżonymi, np. cząsteczkami kulistymi o określonej średnicy nazywanej średnicą zastępczą¹. Przybliżenie kształtu rzeczywistej cząstki kulą o odpowiedniej średnicy zastępczej redukuje liczbę parametrów koniecznych do scharakteryzowania cech geometrycznych cząstki do jednego parametru – średnicy zastępczej, co stanowi istotne uproszczenie opisu matematycznego zjawisk fizycznych zachodzących z udziałem cząstek fazy zdyspergowanej¹.

W analizie wielkości cząstek fazy zdyspergowanej z zastosowaniem rozpraszania światła, jako średnicę zastępczą przyjmuje się średnicę objętości, która stanowi średnicę kuli o objętości takiej



samej jak badana cząstka¹. W analogiczny sposób określić można promień objętości. Przybliżenie rzeczywistych cząstek za pomocą cząstek kulistych o tej samej objętości uzasadniają wyniki wielu prac doświadczalnych i teoretycznych, które wykazały, że w warunkach naturalnych cząstki fazy zdyspergowanej, charakteryzujące się dużą różnorodnością kształtów i chaotyczną orientacją w przestrzeni, rozpraszają światło tak jak jednorodne kule o identycznej objętości¹. W dalszej części niniejszego opracowania jako promień cząstki rozumiany będzie zawsze jej promień objętości a_v .

Fazę zdyspergowaną tworzoną przez cząstki o różnej wielkości opisuje się za pomocą funkcji rozkładu wielkości cząstek. Rozkład wielkości cząstek jest funkcją promienia cząstek a , określającą liczbę cząstek dN_v w jednostce objętości układu dyspersyjnego, których promienie leżą w przedziale $(a, a + da)$ ¹:

$$dN_v = N_v f(a) da \quad 2.1$$

gdzie N_v to całkowita liczba cząstek w jednostce objętości układu dyspersyjnego. Całkowitą liczbę cząstek o promieniu $a_1 \leq a \leq a_2$ w jednostce objętości układu określa wzór¹:

$$N_v(a_1, a_2) = N_v \int_{a_1}^{a_2} f(a) da. \quad 2.2$$

Rozkład wielkości spełnia warunek unormowania do jedności:

$$\int_0^{\infty} f(a) da = 1. \quad 2.3$$

2.3 METODY POMIAROWE

Do klasycznych metod pomiaru wielkości cząstek fazy zdyspergowanej zalicza się:

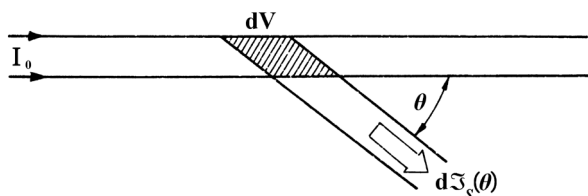
- przesiewanie,
- pomiary mikroskopowe,
- metodę grawimetryczną,
- sedymentację,
- metodę centryfugi,
- konduktometrię.

Zasadniczą wadą tych technik jest inwazyjność, która wyraża się koniecznością wstępnego przygotowania próbki, co często nie-
rzadko prowadzi do zmiany jej pierwotnych właściwości¹. Wady
tej pozbawione są optyczne metody pomiarowe oparte na zjawisku
rozpraszania światła. Przewaga technik optycznych wynika z ich
bezinwazyjności, szybkości działania oraz możliwości prowadzenia
pomiarów *in situ*¹.

Optyczne techniki analizy wielkości cząstek układów dyspersyj-
nych należą do klasy pomiarów pośrednich. Bezpośrednim pomia-
rom poddawane są wielkości fizyczne opisujące rozpraszanie światła
na cząstkach fazy zdyspergowanej układu dyspersyjnego, a następ-
nie na podstawie wyników tych pomiarów wyznaczany jest rozkład
wielkości cząstek fazy zdyspergowanej przy wykorzystaniu zwią-
zku matematycznego pomiędzy mierzonymi wielkościami a szukaną
funkcją rozkładu. Wnioskowanie o rozkładzie wielkości cząstek na
podstawie wyników pomiarów wielkości fizycznych opisujących roz-
praszanie światła w układzie dyspersyjnym jest przykładem zagad-
nienia odwrotnego. Do powszechnych technik optycznych zalicza
się nefelometrię i turbidymetrię^{39, 1}.

- *Pomiary nefelometryczne*

W nefelometrycznej technice analizy wielkości cząstek układów dys-
persyjnych dokonuje się pomiaru zależności objętościowej funkcji
rozpraszania od kąta rozpraszania $\beta(\theta)$ ¹. Jej wyznaczenie wymaga
dokonania pomiaru natężenia promieniowania rozproszonego pod
kątem θ przez elementarną objętość układu $dV - d\mathfrak{V}_s(\theta)$ ¹. Zasadę
pomiaru funkcji $\beta(\theta)$ w nefelometrii ilustruje Rys. 2.1.



Rys. 2.1. Zasada pomiaru objętościowej funkcji rozpraszania w nefelometrii¹.

Wyznaczenie rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej $f(a)$ na podstawie zależności całkowitej wiążącej funkcję $\beta(\theta)$ z funkcją $f(a)$ wymaga znajomości przebiegu $\beta(\theta)$ w pewnym przedziale kąta rozpraszania θ . Dlatego w ramach pomiarów nefelometrycznych wyznaczane są wartości funkcji $\beta(\theta)$ dla wielu kątów θ . Pomiar objętościowej funkcji rozpraszania omówioną metodą następuje wielu problemów technicznych, wśród których najistotniejszymi są¹: dokładne wyznaczenie kąta rozpraszania θ oraz zmiana rozważanej objętości ośrodka dV wraz ze zmianą θ .

- *Pomiary turbidymetryczne*

Metoda turbidymetryczna obejmuje pomiar całkowitego współczynnika osłabienia (ekstynkcji) w funkcji długości fali promieniowania $C(\lambda)$ ¹.

Pomiar całkowitego współczynnika osłabienia c funkcjonuje przy wykorzystaniu prawa Bougera-Lamberta-Beera^{39, 1}. W celu wyznaczenia $C(\lambda)$ mierzony jest spadek natężenia oświetlenia w wiązce światła monochromatycznego o długości fali λ po przebyciu przez nią określonego odcinka drogi w układzie dyspersyjnym. Konieczne jest przy tym spełnienie następujących warunków¹:

- Osłonięcie wiązki światła od promieniowania rozproszonego docierającego z kierunków innych od kierunku propagacji wiązki, co wymusza zastosowanie wiązki ograniczonej cylindrycznie. Warunek ten spełniony jest zawsze jedynie w przybliżeniu, tym dokładniej, im mniejszy jest stosunek szerokości wiązki do długości jej drogi, czyli im mniejszy jest kąt bryłowy, z którego detektor rejestruje światło. Najkorzystniejsze jest w tym przypadku zastosowanie wiązki promieniowania laserowego z uwagi na jej małą rozbieżność.
- Zapewnienie, by w układzie dyspersyjnym nie występowały pierwotne źródła światła.

Spełnienie tych wymogów gwarantuje, że mierzony spadek natężenia oświetlenia w wiązce światła po przebyciu przez nią określonego odcinka drogi w układzie dyspersyjnym spowodowany jest wyłącz-

nie przez zjawisko osłabienia, co zapewnia poprawną wartość całkowitego współczynnika osłabienia wyznaczonego na podstawie mierzonego spadku. Doświadczalne wyznaczenie współczynnika $C(\lambda)$ polega na:

- pomiarze natężenia oświetlenia $I_0(\lambda)$ w wiązce światła monochromatycznego o długości fali λ w określonym punkcie układu dyspersyjnego,
- pomiarze spadku natężenia oświetlenia $\Delta I_z(\lambda)$ w wiązce światła po przebyciu przez nią możliwie jak najkrótszej drogi Δz w układzie dyspersyjnym,
- obliczeniu współczynnika $C(\lambda)$ w oparciu o następujący wzór¹:

$$c(\lambda) = -\frac{1}{z} \ln \left[\frac{I_z(\lambda)}{I_0(\lambda)} \right]. \quad 2.4$$

Wyznaczenie rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej $f(a)$ wiąże się z koniecznością realizacji pomiarów $c(\lambda)$ w pewnym zakresie λ ¹.

2.4 MODELE MATEMATYCZNE POMIARÓW NEFELOMETRYCZNYCH I TURBIDYMETRYCZNYCH

Podstawowym zagadnieniem problemu rozpraszania światła w złożonych układach dyspersyjnych układ jest zjawisko rozpraszania światła przez elementarną cząsteczkę, a w szczególności natężenie promieniowania rozproszonego w kierunku $\mathbf{r}$. Natężenie to zdefiniowane jest jako iloraz strumienia energii (czyli ilości energii przepływającej w jednostce czasu) promieniowania rozpraszanego przez cząstkę w mały kąt bryłowy wokół kierunku $\mathbf{r} - d\varphi_E(\mathbf{r})$ do wielkości tego kąta bryłowego $d\Omega(\mathbf{r})$:

$$\mathfrak{I}_s(\mathbf{r}) = \frac{d\varphi_E(\mathbf{r})}{d\Omega(\mathbf{r})}. \quad 2.5$$

Na potrzeby niniejszej pracy przyjmuje się, że w ośrodku dyspersyjnym dochodzi do jednokrotnego i niekoherentnego rozpraszania światła. W konsekwencji, natężenie światła rozproszonego przez elementarną objętość dV w kierunku $\mathbf{r}$ (Rys. 2.1) jest niekoherentną



superpozycją natężeń rozproszonych przez cząsteczki fazy zdyspergowanej zgromadzonej w tej objętości.

Można wykazać, że dzięki liniowości rozwiązań równań Maxwella natężenie rozproszone na cząstce można wyrazić przy pomocy kombinacji tzw. współczynników Stokesa S_{ij} tworzących tzw. macierz Muellera³⁷⁻³⁹. W szczególności natężenie promieniowania rozproszonego przez cząstkę w płaszczyźnie rozpraszania w kącie θ można wyrazić zależnością^{37, 38}:

$$\mathfrak{I}_s(\theta, x, m) = \frac{1}{k^2} S_{11}(\theta, x, m) I_0, \quad 2.6$$

gdzie $S_{11}(\theta, x, m)$ to element tzw. macierzy Muellera dla cząsteczki, $k = 2\pi / \lambda$ jest liczbą falową dla fali o długości λ . Właściwości optyczne jednorodnej i izotropowej cząstki kulistej umieszczonej w jednorodnym i izotropowym ośrodku dyspersyjnym są w pełni zdeterminowane przez i) względny współczynnik załamania:

$$m = N_1 / N_0 = n + i\kappa, \quad 2.7$$

gdzie N_0 i N_1 to zespolone współczynniki załamania odpowiednio ośrodka i cząstki³⁷, ii) tzw. parametr rozmiarowy cząstki:

$$x = ka = 2\pi a N_1 / \lambda, \quad 2.8$$

gdzie a oznacza promień cząsteczki.

Ważnym parametrem z punkt widzenia turbidymetrycznej techniki pomiarowej jest tzw. przekrój czynny cząstki na osłabienie (ekstynkcję) światła. Osłabienie oznacza ubytek strumienia energii promieniowania padającego będący łącznym efektem rozpraszania promieniowania padającego w kierunkach odmiennych od kierunku promieniowania padającego oraz absorpcji promieniowania padającego przez cząstkę. Przekrój czynny elementarnej cząstki na osłabienie określa się jako stosunek ubytku strumienia energii promieniowania padającego w wyniku osłabienia (ekstynkcji) $\mathcal{P}_{E,ext}$ do natężenia oświetlenia cząstki przez falę padającą^{37, 38}:

$$C_{ext}(x, m) = \frac{\mathcal{P}_{E,ext}}{I_0}. \quad 2.9$$

Rozwiązania dla funkcji $S_{11}(\theta, x, m)$ oraz $C_{ext}(x, m)$ są formułowane językiem aproksymacyjnych i kompleksowych teorii rozpra-

szania światła. W niniejszym opracowaniu wykorzystywany jest model rozpraszania Lorenza-Mie, wynikający z rozwiązania zagadnienia rozpraszania fali na sferycznej cząstce przy użyciu metody rozdzielania zmiennych⁴¹ (SVM, *Separation of Variables*) dla ustalonych warunków brzegowych^{37, 38}:

$$S_{11}(\theta, x, m) = \frac{1}{2} \left[|S_1(\theta, x, m)|^2 + |S_2(\theta, x, m)|^2 \right], \quad 2.10$$

gdzie:

$$\begin{aligned} S_1(\theta, x, m) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n + b_n \tau_n), \\ S_2(\theta, x, m) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n + b_n \pi_n). \end{aligned} \quad 2.11$$

Powyższe równania stanowią rozwinięcia funkcji odpowiednio $S_1(\theta, x, m)$ i $S_2(\theta, x, m)$ w nieskończone szeregi funkcji specjalnych π_n i τ_n ^{37, 38}:

$$\pi_n = \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad \tau_n = \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta}, \quad 2.12$$

przy czym $P_n^1(\cos \theta)$ to funkcja Legendre'a pierwszego rodzaju stopnia n . Wielkości a_n i b_n są tzw. zespolonymi współczynnikami rozwinięcia fali elektromagnetycznej zależnymi od parametrów cząsteczki (wielkość, kształt, budowa) i padającego promieniowania, które wynikają z zapisu warunków brzegowych dla równań Maxwella na powierzchni sfery³⁷:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{m\psi_n(mx)\psi'_n(x) - \psi_n(x)\psi'_n(mx)}{m\psi_n(mx)\xi'_n(x) - \xi_n(x)\psi'_n(mx)}, \\ b_n &= \frac{\psi_n(mx)\psi'_n(x) - m\psi_n(x)\psi'_n(mx)}{\psi_n(mx)\xi'_n(x) - m\xi_n(x)\psi'_n(mx)}, \end{aligned} \quad 2.13$$

przy czym $\psi_n(\rho)$ i $\xi_n(\rho)$ to funkcje Ricatti-Bessela^{37, 42}.

Formalna postać funkcji $C_{ext}(x, m)$ ma również postać nieskończonych, ale zbieżnych szeregów^{37, 38}:

$$C_{ext}(x, m) = \frac{2\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n + b_n) \right\}. \quad 2.14$$



Numeryczne aspekty praktycznej implementacji funkcji $S_1(\theta, x, m)$ i $C_{ext}(x, m)$ przedstawia praca Adena i in.⁴³

- *Pomiary nefelometryczne*

W modelu nefelometrycznym liniowego równania całkowego Fredholma (1.6) zachodzą następujące tożsamości:

$$y \equiv \theta, \quad g_m \equiv \beta(\theta), \quad 2.15$$

zaś jądro równania całkowego (1.6) ma postać¹:

$$K(y, a) \equiv K(\theta, a) = N_v \frac{1}{k^2} S_{11}(x, m, \theta), \quad 2.16$$

gdzie N_v to liczba cząstek fazy zdyspergowanej przypadająca na jednostkę objętości układu dyspersyjnego.

- *Pomiary turbidymetryczne*

W modelu turbidymetrycznym liniowego równania całkowego Fredholma (1.6) zachodzą następujące tożsamości:

$$y \equiv \lambda, \quad g_m \equiv C(\lambda), \quad 2.17$$

zaś jądro równania całkowego (1.6) ma postać¹:

$$K(y, a) \equiv K(\lambda, a) = N_v C_{ext}(x, m). \quad 2.18$$

ZAGADNIENIE ODWROTNE W ANALIZIE OPTYCZNEJ WIELKOŚCI CZĄSTEK UKŁADÓW DYSERSYJNYCH

Prawdziwa wiedza to znajomość przyczyn.

ARYSTOTELES

Zagadnienie odwrotne w optycznej analizie wielkości cząstek układów dyspersyjnych polega na pośrednim pomiarze rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej $f(a)$ na podstawie wyników pomiarów funkcji g_m wynikającej z pomiarów rozpraszania światła w układzie dyspersyjnym. Pomiar ten opiera się na wykorzystaniu związku matematycznego pomiędzy funkcją g_m a poszukiwanym rozkładem wielkości cząstek $f(a)$, który w przypadku obu rozważanych technik pomiarowych – nefelometrii oraz turbidymetrii, wyraża się równaniem całkowym Fredholma pierwszego rodzaju o ogólnej postaci (1.6), czyli modelem matematycznym pomiarów¹.

Z matematycznego punktu widzenia rozwiązanie rozpatrywanego problemu odwrotnego sprowadza się do rozwiązania liniowego równania całkowego o jądrze wyrażonym funkcją $K(y, a)$ mającym postać adekwatną do jednej z rozważanych tutaj technik eksperymentalnych. Niestety z uwagi na złożoną postać $K(y, a)$ rozwiązania analityczne znane są wyłącznie dla szczególnych i najczęściej prostych przypadków.

3.1 NIEWŁAŚCIWE POSTAWIENIE ZAGADNIENIA ODWROTNEGO

Jednym w podstawowych problemów rozwiązania zagadnienia odwrotnego w analizie wielkości cząstek układów dyspersyjnych jest tzw. niewłaściwe postawienie (*ill-posedness*). Według definicji Hadamarda niewłaściwe postawienie oznacza niespełnienie co najmniej jednego z trzech warunków^{44, 33, 35}:



- rozwiązanie $f(a)$ istnieje dla kaŹdej funkcji g_m ,
- rozwiązanie $f(a)$ jest jednoznaczne,
- rozwiązanie $f(a)$ jest stabilne, tzn. zaleŹy w sposb ciągły od funkcji g_m .

Warunek stabilnoŹci rozwiązania moŹna równieŹ sformułować jako Źądanie, by dla kaŹdego dąŹącego do zera ciągu zaburzeń funkcji g_m odpowiadający mu ciąg zaburzeń rozwiązania $f(a)$ także dąŹył do zera³⁵.

Zakładając, Źe jądro całkowe $K(y, a)$ jest całkwalne oraz funkcja $f(a)$ jest rozwiązaniem równania (1.6) określonego i ciągłego na przedziale $(0, \infty)$:

$$g_m = \int_0^{\infty} K(y, a) f(a) da, \quad 3.1$$

to funkcja $f(a) + \delta f_n(a)$, gdzie $\delta f_n(a) = A \sin na$, A – stała, spełnia równoŹ^{35, 34}:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} K(y, a) [f(a) + \delta f_n(a)] da = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} K(y, a) [f(a) + A \sin(na)] da = \\ g_m + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} K(y, a) A \sin(na) da. \end{aligned} \quad 3.2$$

Oznaczając:

$$\delta g_n(y) = \int_0^{\infty} K(y, a) A \sin(na) da \quad 3.3$$

oraz uwzględniając związek^{35, 34}:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} K(y, a) \sin(na) da = 0, \quad 3.4$$

otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta g_n(y) = 0. \quad 3.5$$

Oznacza to, Źe ciąg zaburzeń $\delta g_n(y)$ funkcji g_m taki, Źe $\delta g_n(y) \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$ wywołuje ciąg zaburzeń $\delta f_n(a)$ rozwiązania $f(a)$ problemu (1.6) nie dąŹący do zera dla $n \rightarrow \infty$. Wykazuje to, Źe rozwiązanie problemu odwrotnego (1.6) jest niestabilne, a sam problem jest źle postawiony.

3.2 SŁABE UWARUNKOWANIE ZAGADNIENIA ODWROTNEGO

Problem słabego uwarunkowania (*ill-conditioning*) polega na tym, że niewielkie nawet zakłócenia danych pomiarowych modelu g_m powodują niezwykle duże zaburzenia rozwiązania $f(a)$.

Wgląd w przyczyny słabego uwarunkowania zagadnienia odwrotnego może być uzasadniony przy użyciu metod analizy funkcjonalnej. Przekształcenie całkowe (1.6) można zapisać w postaci równania operatorowego³³:

$$g_m(y) = (Kf)(y) = \int_0^{\infty} K(y, a) f(a) da, \quad y_{\min} \leq y \leq y_{\max}, \quad 3.6$$

gdzie K oznacza operator przekształcający funkcję $f(a)$ w funkcję $g_m(y)$.

Niech funkcja $f(a)$ należy do przestrzeni Hilberta H_1 , którą stanowi przestrzeń $L_2[0, \infty)$ wszystkich funkcji całkowalnych z kwadratem w przedziale $[0, \infty)$, z iloczynem skalarnym określonym wzorem:

$$\langle t, u \rangle_{H_1} = \int_0^{\infty} t(a) u(a) da. \quad 3.7$$

Niech funkcja $g_m(y)$ należy do przestrzeni Hilberta H_2 , którą stanowi przestrzeń $L_2[y_{\min}, y_{\max}]$ wszystkich funkcji całkowalnych z kwadratem w przedziale $[y_{\min}, y_{\max}]$, z iloczynem skalarnym określonym wzorem:

$$\langle t, u \rangle_{H_2} = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} t(y) u(y) dy. \quad 3.8$$

Niech dodatkowo jądro $K(y, a)$ jest całkowalne z kwadratem, tzn.:

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy \int_0^{\infty} K(y, a) da < \infty \quad 3.9$$

oraz operator $K: H_1 \rightarrow H_2$ jest operatorem zwartym³³. Wówczas istnieją funkcje $u_n(y)$ oraz $v_n(a)$, zwane funkcjami osobliwymi, i rzeczywiste liczby dodatnie, zwane wartościami osobliwymi, σ_n takie, że $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots > 0$, $\sigma_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$ oraz^{33, 45}:

$$(Kv_n)(y) = \int_0^{\infty} K(y, a) v_n(a) da = \sigma_n u_n(y), \quad 3.10$$

$$(K^*u_n)(a) = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} K(y, a) u_n(y) dy = \sigma_n v_n(a), \quad 3.11$$



gdzie (*) oznacza sprzężenie. Funkcje $v_n(a)$ tworzą bazę ortonormalną w dziedzinie operatora K – przestrzeni H_1 , natomiast funkcje $u_n(y)$ tworzą bazę ortonormalną w obrazie operatora K – przestrzeni H_2 . W związku z tym funkcję $f(a)$ z przestrzeni H_1 oraz funkcję $g_m(y)$ z przestrzeni H_2 przedstawić można odpowiednio w postaci następujących rozwinięć:

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(a), \quad 3.12$$

$$g_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n u_n(y), \quad 3.13$$

o współczynnikach Fouriera opisanych wzorami:

$$f_n = \langle f, v_n \rangle_{H_1} = \int_0^{\infty} f(a) v_n(a) da, \quad 3.14$$

$$g_n = \langle g, u_n \rangle_{H_2} = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} g_m(y) u_n(y) dy, \quad 3.15$$

Podstawiając wyrażenia (3.12) i (3.13) do równania (3.6) oraz stosując relację (3.10), otrzymujemy:

$$g_n = \sigma_n f_n. \quad 3.16$$

Wynika stąd, że^{33, 45}:

$$g_m(y) = (Kf)(y) = \int_0^{\infty} K(y, a) f(a) da = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n f_n v_n(y) \quad 3.17$$

oraz:

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\sigma_n} v_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g_m(y), u_n(y) \rangle_{H_2}}{\sigma_n} v_n(a). \quad 3.18$$

Rozwinięcie (3.18), zwane szeregiem Picarda, określa rozwiązanie problemu odwrotnego sformułowanego za pomocą równania (3.6). Warunkiem istnienia tego rozwiązania jest zbieżność szeregu, co ściśle wyrazić można jako³³:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\langle g_m(y), u_n(y) \rangle_{H_2}}{\sigma_n} \right|^2 < \infty. \quad 3.19$$

Warunek (3.19) określa się jako kryterium Picarda³³.

W przypadku rozważanego zagadnienia odwrotnego jądro $K(y, a)$ ma postać funkcji „gładkiej”, tzn. zmieniającej się stosunkowo wolno wraz ze zmienną a . W związku z tym, z jakościowego punktu widzenia, operator całkowy K powoduje „wygładzenie” funkcji $f(a)$, tzn. ma właściwość filtrowania z niej wielkoczęstotliwościowych oscylacji oraz gwałtownych zmian wartości³⁴. W sposób bardziej ścisły wyrazić to można poprzez dwie ogólne własności często obserwowane w przypadku wygładzających operatorów całkowych³⁴:

- wartości osobliwe operatora σ_n bardzo szybko maleją ze wzrostem indeksu n , zbliżając się do zera,
- funkcje osobliwe $u_n(y)$ oraz $v_n(a)$ wraz ze wzrostem n prezentują coraz bardziej oscylacyjny przebieg, tzn. wykazują coraz więcej zmian znaków.

Rozwinięcia fourierowskie (3.12) i (3.13) odpowiednio funkcji $f(a)$ i $g_m(y)$ stanowią ich dekompozycje na ortogonalne składowe oscylacyjne o rosnących częstotliwościach. Zgodnie ze wzorem (3.16) operator całkowy K traktować można jako filtr, który tłumi wielkoczęstotliwościowe oscylacje funkcji $f(a)$, odpowiadające współczynnikom fourierowskim f_n o dużych indeksach n , poprzez ich wymnożenie przez bardzo małe wartości osobliwe σ_n , co powoduje, że w wynikowej funkcji $g_m(y)$ istotne są jedynie wolnozmiennie składowe o małych indeksach g_n . Innymi słowy, dane pomiarowe są mało czułe na wielkoczęstotliwościowe oscylacje funkcji $f(a)$ nawet, gdy mają one znaczną amplitudę^{34, 36}. Z kolei rozwiązywanie zagadnienia odwrotnego działa w przeciwną stronę – wiąże się ze znacznym wzmocnieniem wielkoczęstotliwościowych oscylacji funkcji $g_m(y)$, odpowiadających współczynnikom fourierowskim g_n o dużych indeksach n , poprzez ich dzielenie przez bardzo małe wartości osobliwe σ_n , co powoduje, że osiągają one duże amplitudy w rozwiązaniu $f(a)$ ^{34, 36}.

Dotychczasowa analiza nie uwzględniała faktu, że funkcja mierzona podlega zakłóceniom przez losowe błędy pomiarowe oraz błędy zaokrągleń. W rezultacie uzyskana w wyniku pomiarów funkcja



$\tilde{g}_m(y)$ różni się od funkcji $g_m(y)$ spełniającej równanie (3.6) wyrażające model matematyczny procesu pomiarowego. Zakładając addytywny charakter błędów losowych, wpływ zakłóceń można uwzględnić przez dodanie członu zakłóceń $e(y)$ do wyjścia idealnego modelu $g_m(y)$ w równaniu (3.6):

$$\tilde{g}(y) = g(y) + e(y) = (Kf)(y) + e(y) = \int_0^{\infty} K(y, a) f(a) da + e(y). \quad 3.20$$

Funkcja $\hat{f}(a)$ wyznaczona poprzez rozwiązanie równania (3.6) dla funkcji $\tilde{g}_m(y)$ różni się od rzeczywistej funkcji $f(a)$ i stanowi jedynie pewne jej przybliżenie. Zastępując w wyrażeniu (3.18) funkcję $g_m(y)$ funkcją $\tilde{g}_m(y)$ oraz uwzględniając (3.20), uzyskuje się³³:

$$\begin{aligned} \hat{f}(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \tilde{g}_m(y), u_n(y) \rangle_{H_2}}{\sigma_n} v_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g_m(y) + e(y), u_n(y) \rangle_{H_2}}{\sigma_n} v_n(a) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g_m(y), u_n(y) \rangle_{H_2}}{\sigma_n} v_n(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle e(y), u_n(y) \rangle_{H_2}}{\sigma_n} v_n(a). \end{aligned} \quad 3.21$$

Wynika stąd, że błąd rozwiązania $\hat{f}(a)$ w stosunku do prawdziwego rozwiązania $f(a)$ stanowi składnik:

$$r(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle e(y), u_n(y) \rangle_{H_2}}{\sigma_n} v_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{\sigma_n} v_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n v_n(a), \quad 3.22$$

gdzie:

$$e_n = \langle e, u_n \rangle_{H_2} = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} e(y) u_n(y) dy, \quad 3.23$$

$$r_n = \frac{e_n}{\sigma_n} = \langle r, v_n \rangle_{H_1} = \int_0^{\infty} r(a) v_n(a) da. \quad 3.24$$

Wyrażenie (3.21) można więc zapisać w postaci:

$$\hat{f}(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \tilde{g}_m(y), u_n(y) \rangle_{H_2}}{\sigma_n} v_n(a) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle e(y), u_n(y) \rangle_{H_2}}{\sigma_n} v_n(a). \quad 3.25$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$\tilde{g}_n = \langle \tilde{g}, u_n \rangle_{H_2} = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \tilde{g}_m(y) u_n(y) dy, \quad 3.26$$

wzór (3.21) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n}{\sigma_n} v_n(a) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\sigma_n} v_n(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{\sigma_n} v_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n + e_n}{\sigma_n} v_n(a) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n v_n(a),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

gdzie:

$$\hat{f}_n = \frac{\tilde{g}_n}{\sigma_n} = \frac{g_n + e_n}{\sigma_n} = f_n + \frac{e_n}{\sigma_n} = f_n + r_n. \tag{3.28}$$

Jak wcześniej wykazano, rozwinięcia fourierowskie funkcji $f(a)$ i $r(a)$ oraz $g_m(y)$ i $e(y)$ na odpowiednie funkcje osobliwe operatora K stanowią ich dekompozycje na ortogonalne składowe oscylacyjne o rosnących częstotliwościach. Szum reprezentowany przez funkcję $e(y)$ charakteryzuje się przebiegiem szybkozmiennym, co powoduje, że współczynniki e_n jego rozwinięcia fourierowskiego (3.23) przyjmują istotne wartości nawet dla znacznych n , bardzo wolno maleją one ze wzrostem n , a często pozostają stałe lub nawet rosną przy zwiększającym się n . Jednocześnie wolna od zakłóceń funkcja $g_m(y)$ jest funkcją gładką, co sprawia, że współczynniki g_n jej rozwinięcia fourierowskiego (3.13) szybko maleją ze wzrostem n . W związku z tym, głównie wielkoczęstotliwościowe oscylacje szumu $e(y)$ zostają silnie wzmocnione w procesie rozwiązywania zagadnienia odwrotnego za sprawą dzielenia we wzorze (3.24) współczynników e_n przez znikomo małe wartości osobliwe σ_n odpowiadające dużym indeksom n . Powoduje to, że jedynie dla małych n wartości współczynników $\hat{f}_n$ określone przez wyrażenie (3.28) są zbliżone do wartości f_n odpowiadających prawdziwemu rozwiązaniu. Dla dużych n wartości współczynników $\hat{f}_n$ w coraz większym stopniu zdominowane są przez wielkoczęstotliwościowe składowe błędu r_n , ponieważ współczynniki fourierowskie f_n prawdziwego rozwiązania $f(a)$ szybko maleją ze wzrostem n , gdyż rozwiązanie to jest funkcją gładką. Zjawisko to prowadzi ostatecznie do olbrzymiego wzrostu wielkości błędu rozwiązania $\|r(a)\|$ dla niewielkiej nawet wielkości błędów pomiarowych $\|e(y)\|$, co oznacza słabe uwarunkowanie³³.



Reasumując, przyczyną złego uwarunkowania jest wygładzające działanie operatora całkowego K przejawiające się bardzo szybkim zmniejszaniem się jego wartości osobliwych σ_n przy wzroście n . Powoduje to, że w rozwiązaniu $\hat{f}(a)$ największemu wzmocnieniu podlegają wielkoczęstotliwościowe składowe szumu $e(y)^{33, 34, 36}$.

Formalnym warunkiem istnienia rozwiązania $\hat{f}(a)$ jest kryterium Picarda³³:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\langle \tilde{g}_m(y), u_n(y) \rangle_{H_2}}{\sigma_n} \right|^2 < \infty. \quad 3.29$$

Zgodnie z tym kryterium, współczynniki Fouriera funkcji $\tilde{g}_m(y)$ przy wzroście n muszą zanikać szybciej niż wartości osobliwe σ_n operatora całkowego K^{33} . Niespełnienie warunku (3.29) oznacza złe postawienie, natomiast im większa wartość wyrażen pod sumą dla dużych n tym gorsze jest uwarunkowanie zagadnienia odwrotnego³³.

Stopień niewłaściwego postawienia oraz słabego uwarunkowania problemu narasta, gdy zmniejsza się szybkość zmniejszania się wartości osobliwych σ_n przy wzroście n w stosunku do szybkości zmniejszania się współczynników Fouriera funkcji $\tilde{g}_m(y)^{33, 34}$. Przyjmuje się często, że stopień niewłaściwego postawienia oraz słabego uwarunkowania zagadnienia jest³³:

- umiarkowany, jeżeli $\sigma_n = o(n^{-\alpha})$ dla pewnego $\alpha > 0$,
- poważny w innych przypadkach, na przykład, jeżeli $\sigma_n = o(e^{-n})$.

NUMERYCZNE METODY ROZWIĄZYWANIA
ZAGADNIENIA ODWROTNEGO
W ANALIZIE OPTYCZNEJ WIELKOŚCI
CZĄSTEK UKŁADÓW DYSPERSYJNYCH

*Błądzić jest rzeczą ludzką – wszystko pogmatwać
potrafi tylko komputer.*

AUTOR NIEZNANY

Analityczne rozwiązania zagadnienia odwrotnego w pomiarach nefelometrycznych i turbidymetrycznych znane są wyłącznie dla prostych przypadków szczególnych, np. modeli opartych na dyfrakcji Fraunhofera¹. Co więcej, modele uproszczone są słabo uwarunkowane, co powoduje, że w praktycznych zagadnieniach stosuje się techniki numeryczne, wymagające dyskretnej postaci modelu obiektu pomiarowego, czyli równania całkowego Fredholma (1.6).

4.1 DYSKRETYZACJA ZAGADNIENIA ODWROTNEGO

Istnieje wiele metod dyskretyzacji równania całkowego (1.6)^{33, 36}. W badaniach prowadzonych w Katedrze Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej wykorzystywano technikę opartą na kolokacji oraz aproksymacji całkowania przez kwadraturę numeryczną^{33, 46}.

Zakładając, że szukany rozkład wielkości cząstek $f(a)$ ograniczony jest do przedziału $[a_{\min}, a_{\max}]$, a poza tym przedziałem wartości $f(a)$ są zaniedbywalnie małe, to równanie całkowe (1.6) można zapisać w postaci:

$$\int_{\Omega} K(y, a) f(a) da \approx \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} K(y, a) f(a) da. \quad 4.1$$

Podając powyższe równanie kwadraturze numerycznej, otrzymujemy zapis w postaci ważonej sumy wartości funkcji podcałkowej³³:



$$\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} K(y, a) f(a) da \approx \sum_{j=1}^q w_j K(y, a_j) f(a_j), \quad 4.2$$

gdzie w_j to współczynniki wagowe, zaś Punkty a_j oraz odpowiadające im wagi wybrać można na różne sposoby.

Stosując tzw. metodę prostokątów (*midpoint rule*) przedział $[a_{\min}, a_{\max}]$ dzielony jest na q równych podprzedziałów, każdy o szerokości^{33, 46}:

$$\Delta a = (a_{\max} - a_{\min}) / q. \quad 4.3$$

Podprzedziałem j -tym jest:

$$[a_{\min} + (j-1)\Delta a, a_{\min} + j\Delta a] \quad 4.4$$

Każdy z punktów a_j stanowi środek odpowiedniego podprzedziału j :

$$a_j = a_{\min} + (j-0.5)\Delta a. \quad 4.5$$

Funkcja podcałkowa aproksymowana jest za pomocą funkcji odcinkami stałej, tzn. przyjmującej w kolejnych podprzedziałach stałe wartości równe wartości funkcji w środkach tych podprzedziałów^{33, 46}:

$$\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} K(y, a) f(a) da \approx \sum_{j=1}^q K(y, a_j) f(a_j) \Delta a, \quad 4.6$$

Wynika stąd, że dla metody prostokątów^{33, 46}:

$$w_j = \Delta a. \quad 4.7$$

W metodzie trapezów (*trapezoid rule*) funkcja podcałkowa aproksymowana jest za pomocą funkcji odcinkami liniowej. Odpowiadający temu rozkład punktów a_j określa wzór³³:

$$a_j = a_{\min} + (j-1)\Delta a, \quad 4.8$$

gdzie:

$$\Delta a = (a_{\max} - a_{\min}) / (q-1), \quad 4.9$$

Współczynniki wagowe w metodzie trapezów dane są wzorem:

$$w_j = \begin{cases} \Delta a, & 2 \leq j \leq p-1 \\ \frac{1}{2} \Delta a, & j = 1, p. \end{cases} \quad 4.10$$

Dokładność aproksymacji całki przez kwadraturę numeryczną wzrasta wraz ze wzrostem q .

W rzeczywistych pomiarach nie jest możliwe wyznaczenie ciągłej zależności wielkości mierzonej od zmiennej kontrolowanej $g_m(y)$, a jedynie dyskretnego zbioru wartości tej wielkości g_i dla określonych wartości zmiennej kontrolowanej y_i ^{33, 35, 36}:

$$g_i = g_m(y_i), \quad y_{\min} \leq y_i \leq y_{\max}, \quad i = 1, \dots, p. \quad 4.11$$

Punkty pomiarowe y_i zwane są punktami kolokacji³³. Jeżeli punkty te rozmieszczone są odpowiednio gęsto w przedziale $[y_{\min}, y_{\max}]$, to możliwe jest odtworzenie przebiegu zależności $g_m(i)$ na podstawie wartości g_i . Dokładność aproksymacji funkcji $g_m(i)$ przez zbiór dyskretnych wartości $g_i = g_m(y_i)$ wzrasta wraz ze wzrostem p .

Wyrażając każdą z wartości g_i za pomocą równania (1.6) oraz wykorzystując przybliżenia (4.1) i (4.2), otrzymujemy następujący układ równań³³:

$$g_i = g(y_i) = \sum_{j=1}^q w_j K(y_i, a_j) f(a_j), \quad i = 1, \dots, p. \quad 4.12$$

Wprowadzając wektory kolumnowe:

$$\mathbf{g} = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_p]^T = [g(y_1) \quad g(y_2) \quad \dots \quad g(y_p)]^T, \quad 4.13$$

$$\mathbf{f} = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_q]^T = [f(a_1) \quad f(a_2) \quad \dots \quad f(a_q)]^T, \quad 4.14$$

gdzie T oznacza transpozycję, oraz macierz:

$$\mathbf{K} = [K_{ij}], \quad 4.15$$

której elementy określa wzór:

$$K_{ij} = w_j K(y_i, a_j), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad 4.16$$

układ równań (4.2) zapisać można w postaci^{33, 36, 39, 46}:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Kf}. \quad 4.17$$

Dyskretyzacja równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju (1.6) prowadzi zatem do układu liniowych równań algebraicznych (4.17).

4.2 ROZWIĄZANIE NK Z MINIMALNĄ NORMĄ ZAGADNIENIA ODWROTNEGO W DYSKRETNEJ POSTACI

Rozpatrywane zagadnienie odwrotne ma postać układu p liniowych i dyskretnych równań algebraicznych z q niewiadomymi (4.17). Jako



że w ogólnym przypadku $p \neq q$, układ ten może nie posiadać rozwiązania otrzymywanego przez odwrócenie macierzy $\mathbf{K}$. W związku z tym w dalszych rozważaniach przez rozwiązanie układu (4.17) rozumiane będzie rozwiązanie najmniejszych kwadratów (NK) z minimalną normą, które dla układu (4.17) zawsze istnieje^{33, 36, 34, 47, 48}.

Rozwiązanie najmniejszych kwadratów z minimalną normą wyznaczyć można w oparciu o rozkład macierzy $\mathbf{K}$ na wartości osobliwe (SVD – *Singular Value Decomposition*), który dany jest wzorem^{33, 36, 34, 47, 48}:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T, \quad 4.18$$

gdzie $\mathbf{U}$ to macierz ortogonalna o wymiarach $p \times p$, $\mathbf{V}$ to macierz ortogonalna o wymiarach $q \times q$, zaś $\mathbf{S}$ to macierz o wymiarach $p \times q$ mająca postać^{33, 36, 34, 47, 48}:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{\hat{O}} & \mathbf{0}_{r,q-r} \\ \mathbf{0}_{p-r,r} & \mathbf{0}_{p-r,q-r} \end{bmatrix}, \quad 4.19$$

przy czym $\mathbf{\hat{O}}$ – macierz diagonalna o wymiarach $r \times r$, gdzie r – rząd macierzy $\mathbf{K}$, czyli maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn lub wierszy macierzy $\mathbf{K}$, $\mathbf{0}_{m,n}$ – macierz o wymiarach $m \times n$ wypełniona samymi zerami. Elementy diagonalne macierzy $\mathbf{\hat{O}}$ są dodatnie i ustawione w porządku malejącym: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Zwane są one wartościami osobliwymi macierzy $\mathbf{K}$. Odpowiadające im kolumny macierzy $\mathbf{U}$ oraz $\mathbf{V}$ stanowią wektory osobliwe macierzy $\mathbf{K}$ ^{33, 36, 34, 47, 48}.

Podstawiając wyrażenia (4.18) oraz (4.19) do równania (4.17), uzyskuje się:

$$\mathbf{g} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{\hat{O}} & \mathbf{0}_{r,q-r} \\ \mathbf{0}_{p-r,r} & \mathbf{0}_{p-r,q-r} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{f}, \quad 4.20$$

stąd wynika, że:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{\hat{O}} & \mathbf{0}_{r,q-r} \\ \mathbf{0}_{p-r,r} & \mathbf{0}_{p-r,q-r} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{f}. \quad 4.21$$

Oznaczając:

$$\mathbf{g}' = \mathbf{U}^T \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}'_1 \\ \mathbf{g}'_2 \end{bmatrix}, \quad 4.22$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{V}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_1 \\ \mathbf{f}'_2 \end{bmatrix}, \quad 4.23$$

gdzie $\mathbf{g}'_1$ – wektor kolumnowy utworzony z pierwszych r elementów wektora $\mathbf{g}'$, $\mathbf{g}'_2$ – wektor kolumnowy utworzony z pozostałych $(p-r)$ elementów wektora $\mathbf{g}'$, $\mathbf{f}'_1$ – wektor kolumnowy utworzony z pierwszych r elementów wektora $\mathbf{f}'$, $\mathbf{f}'_2$ – wektor kolumnowy utworzony z pozostałych $(q-r)$ elementów wektora $\mathbf{f}'$, równanie (4.21) zapisać można w postaci układu⁴⁷:

$$\begin{cases} \mathbf{g}'_1 = \Sigma \mathbf{f}'_1 + \mathbf{0}_{r,q-r} \mathbf{f}'_2 \\ \mathbf{g}'_2 = \mathbf{0}_{p-r,r} \mathbf{f}'_1 + \mathbf{0}_{p-r,q-r} \mathbf{f}'_2 \end{cases} \quad 4.24$$

Ponieważ macierz $\mathbf{O}$ jest nieosobliwa⁴⁷:

$$\mathbf{f}'_1 = \Sigma^{-1} \mathbf{g}'_1, \quad 4.25$$

co w tym przypadku przyjmuje szczególnie prostą postać:

$$f'_{1,n} = \sigma_n^{-1} g'_{1,n}, \quad n = 1, \dots, r. \quad 4.26$$

Wektor $\mathbf{f}'_2$ jest dowolny, co oznacza, że rozwiązanie układu (4.17) jest niejednoznaczne⁴⁷. Natomiast dla każdego wektora $\mathbf{g}'_2 \neq \mathbf{0}$ drugie z równań w układzie (4.24) jest sprzeczne, co oznacza sprzeczność układu (4.17)⁴⁷.

Zgodnie ze wzorem (4.22) wektor $\mathbf{g}'$ stanowi reprezentację wektora $\mathbf{g}$ w bazie ortonormalnej utworzonej przez kolumny macierzy $\mathbf{U}$, zgodnie zaś ze wzorem (4.23) wektor $\mathbf{f}'$ stanowi reprezentację wektora $\mathbf{f}$ w bazie ortonormalnej utworzonej przez kolumny macierzy $\mathbf{V}$. Niech:

$$\mathbf{g}^{r*} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}'_1 \\ \mathbf{0}_{p-r} \end{bmatrix}, \quad 4.27$$

$$\mathbf{g}'_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r \\ \mathbf{g}'_2 \end{bmatrix}, \quad 4.28$$

$$\mathbf{f}^{r*} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_1 \\ \mathbf{0}_{q-r} \end{bmatrix}, \quad 4.29$$

$$\mathbf{f}'_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r \\ \mathbf{f}'_2 \end{bmatrix}, \quad 4.30$$

gdzie $\mathbf{0}_n$ to n -elementowy wektor kolumnowy. Na podstawie wcześniejszych rozważań można stwierdzić, że wektor $\mathbf{g}^{r*}$ stanowi rzut

ortogonalny wektora $\mathbf{g}$ na r -wymiarową przestrzeń kolumnową macierzy $\mathbf{K}$ rozpiętą przez r pierwszych kolumn macierzy $\mathbf{U}$, wektor $\mathbf{g}'_0$ stanowi rzut ortogonalny wektora $\mathbf{g}$ na $(p-r)$ -wymiarowe dopełnienie ortogonalne przestrzeni kolumnowej macierzy $\mathbf{K}$ w przestrzeni rozpiętej przez kolumny macierzy, $\mathbf{U}$ oraz że wektor $\mathbf{f}^{**}$ stanowi rzut ortogonalny wektora $\mathbf{f}$ na r -wymiarową przestrzeń wierszową macierzy $\mathbf{K}$ utworzoną przez r pierwszych kolumn macierzy $\mathbf{V}$, wektor $\mathbf{f}'_0$ stanowi rzut ortogonalny wektora $\mathbf{f}$ na $(q-r)$ -wymiarowe dopełnienie ortogonalne przestrzeni wierszowej macierzy $\mathbf{K}$ w przestrzeni rozpiętej przez kolumny macierzy $\mathbf{V}$. Z własności rzutu ortogonalnego wynika, że dla danego wektora $\mathbf{g}'$ należącego do p -wymiarowej przestrzeni euklidesowej, spośród wszystkich wektorów $\mathbf{w}$ należących do r -wymiarowej podprzestrzeni, najmniejszą normę euklidesową wektora $\mathbf{g}'_0 = \mathbf{g}' - \mathbf{w}$ zapewnia wektor $\mathbf{w} = \mathbf{g}^{**}$. Zatem każdy wektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' &= \mathbf{f}^{**} + \mathbf{f}'_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{O}^{-1} \mathbf{g}'_1 \\ \mathbf{0}_{q-r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r \\ \mathbf{f}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}^{-1} & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \mathbf{0}_{q-r,r} & \mathbf{0}_{q-r,p-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}'_1 \\ \mathbf{g}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r \\ \mathbf{f}'_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}^{-1} & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \mathbf{0}_{q-r,r} & \mathbf{0}_{q-r,p-r} \end{bmatrix} \mathbf{g}' + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r \\ \mathbf{f}'_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad 4.31$$

minimalizuje wyrażenie:

$$\|\mathbf{g}'_0\|_2 = \|\mathbf{g}' - \mathbf{g}^{**}\|_2 = \|\mathbf{U}\mathbf{g}' - \mathbf{U}\mathbf{g}^{**}\|_2 = \|\mathbf{g} - \mathbf{U}\mathbf{g}^{**}\|_2. \quad 4.32$$

Równość (4.32) wynika z ortogonalności macierzy $\mathbf{U}$ oraz ze związku (4.22). Stosując w wyrażeniu (4.32) kolejno zależności: (4.27), (4.24), (4.23) oraz (4.18)–(4.20), uzyskuje się:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}'_0\|_2 &= \|\mathbf{g} - \mathbf{U}\mathbf{g}^{**}\|_2 = \left\| \mathbf{g} - \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{g}'_1 \\ \mathbf{0}_{p-r} \end{bmatrix} \right\|_2 = \left\| \mathbf{g} - \mathbf{U} \begin{bmatrix} \Sigma \mathbf{f}'_1 + \mathbf{0}_{r,q-r} \mathbf{f}'_2 \\ \mathbf{0}_{p-r} \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &= \left\| \mathbf{g} - \mathbf{U} \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0}_{r,q-r} \\ \mathbf{0}_{p-r,r} & \mathbf{0}_{p-r,q-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_1 \\ \mathbf{f}'_2 \end{bmatrix} \right\|_2 = \left\| \mathbf{g} - \mathbf{U} \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0}_{r,q-r} \\ \mathbf{0}_{p-r,r} & \mathbf{0}_{p-r,q-r} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{f} \right\|_2 \\ &= \|\mathbf{g} - \mathbf{K}\mathbf{f}\|_2 = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2. \end{aligned} \quad 4.33$$

Uwzględniając wzory (4.22) i (4.23) w wyrażeniu (4.31), można stwierdzić, że każdy wektor:

$$\mathbf{f} = \mathbf{V}\mathbf{f}' = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{O}^{-1} & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \mathbf{0}_{q-r,r} & \mathbf{0}_{q-r,p-r} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T \mathbf{g} + \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r \\ \mathbf{f}'_2 \end{bmatrix} \quad 4.34$$

minimalizuje normę euklidesową wektora rezyduów, czyli $\|\hat{\mathbf{a}}\|_2 = \|\mathbf{g} - \mathbf{K}\mathbf{f}\|_2$. Wobec tego każdy z tych wektorów stanowi rozwiązanie najmniejszych kwadratów układu równań (4.17)⁴⁷. Rozwiązań takich jest nieskończenie wiele, ponieważ wektor $\mathbf{f}'_2$ jest dowolny. Jak wynika ze wzoru (4.34), przyjmując $\mathbf{f}'_2 = \mathbf{0}_{q-r}$, otrzymuje się rozwiązanie najmniejszych kwadratów z minimalną normą euklidesową dane wyrażeniem⁴⁸:

$$\mathbf{f}_{LSMN} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{O}^{-1} & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \mathbf{0}_{q-r,r} & \mathbf{0}_{q-r,p-r} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T \mathbf{g}. \quad 4.35$$

Przyjmując oznaczenie⁴⁸:

$$\mathbf{K}^+ = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{O}^{-1} & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \mathbf{0}_{q-r,r} & \mathbf{0}_{q-r,p-r} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T, \quad 4.36$$

można zapisać⁴⁸:

$$\mathbf{f}_{LSMN} = \mathbf{K}^+ \mathbf{g}. \quad 4.37$$

Macierz $\mathbf{K}^+$ zwana jest pseudoodwrotnością macierzy $\mathbf{K}$ ⁴⁸.

Oznaczając kolejne kolumny macierzy $\mathbf{U}$ i macierzy $\mathbf{V}$ odpowiednio $\mathbf{u}_n$ i $\mathbf{v}_n$ oraz zapisując iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{t}$ i $\mathbf{u}$ w przestrzeni euklidesowej jako:

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{t}^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{t}, \quad 4.38$$

Rozwiązanie (4.35) można wyrazić wzorem^{33, 36, 34}:

$$\mathbf{f}_{LSMN} = \sum_{n=1}^r \frac{\mathbf{u}_n^T \mathbf{g}}{\sigma_n} \mathbf{v}_n = \sum_{n=1}^r \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \mathbf{v}_n. \quad 4.39$$

W rzeczywistości rząd układu równań (4.17) zwykle wynosi:

$$r = \min(p, q), \quad 4.40$$

czyli układ charakteryzuje się pełnym rzędem wierszowym $r = p$ lub kolumnowym $r = q$.

Należy zwrócić uwagę na podobieństwo wzoru (4.39) oraz (3.18), jak również podobieństwa par wzorów: (3.12) i (4.32), (3.13) i (4.22)



oraz (3.16) i (4.26). Podobieństwa te wynikają z faktu, że macierz $\mathbf{K}$ reprezentuje operator liniowy K_{dyskr} przekształcający wektor $\mathbf{f}$ należący do q -wymiarowej przestrzeni euklidesowej w wektor $\mathbf{g}$ należący do p -wymiarowej przestrzeni euklidesowej zgodnie ze wzorem (4.17). Operator K_{dyskr} oraz operator całkowy K rozważany w punkcie 3.2 różnią się wymiarem oraz rodzajem przestrzeni będących ich dziedzinami i obrazami – dla operatora K dziedzinę i obraz stanowią nieskończeniewymiarowe przestrzenie funkcyjne Hilberta L_2 z iloczynem skalarnym określonym wzorem (3.7) dla dziedziny i (3.8) dla obrazu, natomiast dla operatora K_{dyskr} dziedzinę i obraz stanowią skończeniewymiarowe przestrzenie euklidesowe l_2 z iloczynem skalarnym określonym ogólnie wzorem (4.38). Wartości osobliwe i wektory osobliwe macierzy $\mathbf{K}$ są wartościami osobliwymi i wektorami osobliwymi operatora K_{dyskr} reprezentowanego przez tę macierz. Ze wzoru (4.18) wynika bowiem, że:

$$\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{S}, \quad 4.41$$

$$\mathbf{K}^T \mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{S}, \quad 4.42$$

co zapisać można w postaci odpowiednio:

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_n = \sigma_n \mathbf{u}_n, \quad n = 1, \dots, r, \quad 4.43$$

$$\mathbf{K}^T \mathbf{u}_n = \sigma_n \mathbf{v}_n, \quad n = 1, \dots, r. \quad 4.44$$

Na podstawie wzorów (4.18) i (4.19) można wyprowadzić następujące związki⁴⁸:

$$\mathbf{K}^T \mathbf{K} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{O}}^2 & \mathbf{0}_{r,q-r} \\ \mathbf{0}_{q-r,r} & \mathbf{0}_{q-r,q-r} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T, \quad 4.45$$

$$\mathbf{K}\mathbf{K}^T = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{O}}^2 & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \mathbf{0}_{p-r,r} & \mathbf{0}_{p-r,p-r} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T. \quad 4.46$$

Z zależności (4.45) wynika, że jeżeli układ równań (4.17) ma pełen rząd kolumnowy, czyli $q = r$, macierz $\mathbf{K}^T \mathbf{K}$ jest nieosobliwa, a jej wartości własne i wektory własne stanowią odpowiednio: σ_i^2 oraz $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, q$. Mnożąc (4.17) lewostronnie przez $\mathbf{K}^T$, uzyskuje się:

$$\mathbf{K}^T \mathbf{g} = \mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{f}, \quad 4.47$$

skąd:

$$\mathbf{K}^T \mathbf{g} = \mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{f}. \quad 4.48$$

Jest to zwykle rozwiązanie najmniejszych kwadratów^{33, 36, 47, 48}.

Z zależności (4.46) wynika, że jeżeli układ równań (4.17) ma pełen rząd wierszowy, czyli $p = r$, macierz $\mathbf{K}\mathbf{K}^T$ jest nieosobliwa, a jej wartości własne i wektory własne stanowią odpowiednio: σ_i^2 oraz $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \dots, p$. Przez podstawienie można sprawdzić, że rozwiązanie (4.35) przybiera w tym przypadku postać:

$$\mathbf{f}_{MN} = \mathbf{K}^T (\mathbf{K}\mathbf{K}^T)^{-1} \mathbf{g}. \quad 4.49$$

Jest to zwykle rozwiązanie z minimalną normą.

4.3 SŁABE UWARUNKOWANIE ZAGADNIENIA ODWROTNEGO W DYSKRETNEJ POSTACI

Następstwem słabego uwarunkowania zagadnienia odwrotnego sformułowanego za pomocą równania całkowego (1.6) jest słabe uwarunkowanie numeryczne układu równań (4.17), stanowiącego dyskretną postać równania (1.6)^{33, 36, 34, 1}.

Macierz $\mathbf{K}$ reprezentuje operator liniowy K_{dyskr} będący dyskretną aproksymacją operatora całkowego K zdefiniowanego równaniem (3.6). W związku z tym operator K_{dyskr} wykazuje własności analogiczne do własności operatora K . Mianowicie operator K_{dyskr} powoduje wygładzanie wektora $\mathbf{f}$, tzn. ma właściwość filtrowania z niego wielkoczęstotliwościowych oscylacji oraz gwałtownych zmian wartości. Ścisłej sformułować to można w postaci dwóch ogólnych własności³⁴:

- wartości osobliwe σ_n operatora K_{dyskr} bardzo szybko maleją ze wzrostem indeksu n , zbliżając się do zera,
- wektory osobliwe $\mathbf{u}_n$ oraz $\mathbf{v}_n$ wraz ze wzrostem indeksu n prezentują coraz bardziej oscylacyjny przebieg, tzn. wykazują coraz więcej zmian znaków.

Analogicznie, jak w przypadku operatora K , dane pomiarowe są mało czułe na wielkoczęstotliwościowe oscylacje w wektorze $\mathbf{f}$ nawet, gdy mają one znaczną amplitudę. Z kolei rozwiązywanie



zagadnienia odwrotnego działa w przeciwną stronę – wiąże się ze znacznym wzmocnieniem wielkoczęstotliwościowych oscylacji występujących w wektorze $\mathbf{g}$ ^{34, 36}. Ponieważ $f'_{1,n}$ i $g'_{1,n}$ stanowią współczynniki rozwinięcia wektorów odpowiednio $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ na ortogonalne składowe oscylacyjne o rosnących częstotliwościach zgodnie ze wzorami odpowiednio (4.23) i (4.22), wzmocnienie to wynika z faktu, że współczynniki $f'_{1,n}$ o dużych indeksach n są rezultatem dzielenia współczynników $g'_{1,n}$ przez znikomo małe wartości osobliwe σ_n we wzorze (4.26)^{34, 36}.

Uwzględnienie w analizie addytywnych losowych błędów pomiarowych oraz błędów zaokrągleń zakłócających dane pomiarowe $\mathbf{g}$ następuje poprzez zastąpienie wektora $\mathbf{g}$ będącego wyjściem idealnego modelu (4.17) przez wektor rzeczywistych danych pomiarowych^{34, 36}:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + \mathbf{e}, \quad 4.50$$

gdzie $\mathbf{e}$ – wektor reprezentujący zakłócenia addytywne (proces stochastyczny). Równanie (4.17) przyjmuje w tej sytuacji postać^{34, 36, 39}:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{K}\mathbf{f} + \mathbf{e}. \quad 4.51$$

Wektor $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$ wyznaczony na podstawie rzeczywistych danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$ stanowi jedynie pewne przybliżenie wektora prawdziwego rozwiązania $\mathbf{f}_{LSMN}$ ³⁶. Zastępując $\mathbf{g}$ przez $\tilde{\mathbf{g}}$ we wzorze (4.39) oraz uwzględniając zależność (4.50), uzyskuje się:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{LSMN} &= \sum_{n=1}^r \frac{\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \mathbf{v}_n = \sum_{n=1}^r \frac{\langle \mathbf{g} + \mathbf{e}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \mathbf{v}_n \\ &= \sum_{n=1}^r \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \mathbf{v}_n + \sum_{n=1}^r \frac{\langle \mathbf{e}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \mathbf{v}_n. \end{aligned} \quad 4.52$$

Wynika stąd, że błąd rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$ w stosunku do prawdziwego rozwiązania $\mathbf{f}_{LSMN}$ stanowi składnik:

$$\mathbf{r} = \sum_{n=1}^r \frac{\langle \mathbf{e}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \mathbf{v}_n. \quad 4.53$$

Wyrażenie (4.52) można więc zapisać w postaci:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LSMN} = \mathbf{f}_{LSMN} + \mathbf{r}. \quad 4.54$$

Analogenicznie, jak w przypadku operatora całkowego K , szum reprezentowany przez wektor $\mathbf{e}$ charakteryzuje się przebiegiem szybkozmennym, co powoduje że współczynniki jego rozwinięcia na wektory osobiłwe $\mathbf{u}_n - \langle \mathbf{e}, \mathbf{u}_n \rangle$ przyjmują istotne wartości nawet dla znacznych n , bardzo wolno maleją one ze wzrostem n , a często pozostają stałe lub nawet rosną przy zwiększającym się n . Jednocześnie wolny od zakłóceń wektor $\mathbf{g}$ reprezentuje funkcją gładką, co sprawia, że współczynniki jego rozwinięcia na wektory osobiłwe $\mathbf{u}_n - \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_n \rangle$ szybko maleją ze wzrostem n . W związku z tym, głównie wielkoczęstotliwościowe oscylacje szumu $\mathbf{e}$ zostają silnie wzmocnione w procesie rozwiązywania zagadnienia odwrotnego za sprawą dzielenia we wzorze (4.53) współczynników $\langle \mathbf{e}, \mathbf{u}_n \rangle$ przez znikomo małe wartości osobiłwe σ_n odpowiadające dużym indeksom n . Powoduje to, że jedynie dla małych n wartości współczynników rozwinięcia wektora $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$ na wektory osobiłwe $\mathbf{v}_n - \langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle / \sigma_n$ są zbliżone do wartości $\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_n \rangle / \sigma_n$ odpowiadających prawdziwemu rozwiązaniu $\mathbf{f}_{LSMN}$. Dla dużych n wartości współczynników $\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle / \sigma_n$ w coraz większym stopniu zdominowane są przez wielkoczęstotliwościowe składowe błędu $\langle \mathbf{e}, \mathbf{u}_n \rangle / \sigma_n$, ponieważ współczynniki $\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_n \rangle / \sigma_n$ prawdziwego rozwiązania $\mathbf{f}_{LSMN}$ szybko maleją ze wzrostem n . Zjawisko to prowadzi ostatecznie do olbrzymiego wzrostu wielkości błędu rozwiązania $\|\mathbf{r}\|$ dla nawet niewielkich wartości błędów pomiarowych $\|\mathbf{e}\|$, co oznacza słabe uwarunkowanie^{33, 36, 34}.

Reasumując, za słabe uwarunkowanie dyskretnej postaci zagadnienia odwrotnego (4.17) odpowiedzialne jest wyglądające działanie operatora liniowego reprezentowanego przez macierz $\mathbf{K}$ przejawiające się bardzo szybkim zmniejszaniem się jego wartości osobiłwych σ_n przy wzroście n . Sprawia to, że w rozwiązaniu $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$ największemu wzmocnieniu podlegają wielkoczęstotliwościowe składowe szumu $\mathbf{e}$ ^{33, 36, 34}.

Stopień słabego uwarunkowania problemu narasta, gdy zwiększa się szybkość zmniejszania się wartości osobiłwych σ_n przy wzroście n w stosunku do szybkości zmniejszania się współczynników $\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle$ ^{33, 34}. Uwarunkowanie zagadnienia pogarsza się wraz ze zwiększaniem się wartości wyrażenia^{33, 34}:



$$C_{Picard} = \sum_{n=1}^r \left| \frac{\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \right|^2. \quad 4.55$$

Za formalny warunek dobrego uwarunkowania przyjmuje się dyskretne kryterium Picarda, które stwierdza, że aby zagadnienie wykazywało dobre uwarunkowanie, współczynniki fourierowskie $\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle$ muszą zanikać szybciej niż wartości osobliwe σ_n macierzy $\mathbf{K}$ ^{33,34}. Problem odwrotny w postaci dyskretnej (4.17) spełnia dyskretne kryterium Picarda, jeżeli odpowiadający mu problem ciągły (3.6) spełnia ciągłe kryterium Picarda (3.19)³⁶.

Liczbą miarą uwarunkowania numerycznego układu równań (4.17) jest liczba warunkowa macierzy $\mathbf{K}$ zdefiniowana jako stosunek największej do najmniejszej wartości osobliwej macierzy $\mathbf{K}$ ^{36,49}:

$$\kappa_2(\mathbf{K}) = \sigma_1 / \sigma_r. \quad 4.56$$

W związku z bardzo szybkim zmniejszaniem się wartości osobliwych σ_n przy wzroście n liczba warunkowa osiąga olbrzymie wartości, co jest oznaką bardzo słabego uwarunkowania układu równań (4.17)³⁶.

Małe wartości osobliwe macierzy $\mathbf{K}$ świadczą o tym, że macierz ta jest bliska macierzy osobliwej, co oznacza, że jej wiersze są wzajemnie niemal liniowo zależne oraz jej kolumny są wzajemnie niemal liniowo zależne^{34,36}.

Małe wartości osobliwe σ_n dla dużych n powodują, że układ równań (4.17) jest bliski układowi niedookreślonymu³⁶. Znaczna niepewność rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN} - \Delta \hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$ przy niewielkiej nawet niepewności danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}} - \Delta \tilde{\mathbf{g}}$ jakościowo traktowana może być jako efekt tego, że warunek spełniania przez wektor $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$ układu równań (4.17), czyli warunek jego zgodności z danymi pomiarowymi $\tilde{\mathbf{g}}$, nie określa w sposób dokładny i jednoznaczny tego wektora. Istnieje bowiem cały szeroki przedział wektorów $[\hat{\mathbf{f}}_{LSMN} - \Delta \hat{\mathbf{f}}_{LSMN}, \hat{\mathbf{f}}_{LSMN} + \Delta \hat{\mathbf{f}}_{LSMN}]$ spełniających układ równań (4.17) zadaną dobrą dokładnością $\Delta \tilde{\mathbf{g}}$ ³⁶. Uzyskanie jednoznacznie określonego rozwiązania zagadnienia odwrotnego wymaga uzupełnienia układu równań (4.17), wyrażającego warunek zgodności

rozwiązania z danymi pomiarowymi, przez dodatkowy warunek nałożony *a priori* na poszukiwane rozwiązanie. W procesie rozwiązywania problemu konieczne jest więc zastosowanie dodatkowej informacji apriorycznej o rozwiązaniu^{36, 50}.

4.4 REGULARYZACJA ZAGADNIENIA ODWROTNEGO W DYSKRETNEJ POSTACI

Jak wykazano w rozdziale 4.3, słabe uwarunkowanie zagadnienia odwrotnego wyrażonego układem równań (4.17) ma swoje źródło w wygładzających właściwościach operatora liniowego reprezentowanego przez macierz $\mathbf{K}$, czego przejawem jest bardzo szybkie zmniejszanie się wartości osobliwych σ_n tego operatora przy wzroście n . Powoduje to, że wnoszone przez szum wielkoczęstotliwościowe oscylacje w danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$ podlegają niezwykle silnemu wzmocnieniu w rozwiązaniu $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$, w efekcie czego rozwiązanie te posiadają nierealistycznie oscylacyjny przebieg. W związku z tym, naturalnym warunkiem, który należy nałożyć *a priori* na poszukiwane rozwiązanie w celu jego dookreślenia i przez to poprawy uwarunkowania zagadnienia, jest warunek gładkości funkcji $\hat{f}(a)$ reprezentowanej przez wektor $\hat{\mathbf{f}}$ ^{33, 34, 36}. Warunek ten wynika z apriorycznej wiedzy, według której funkcje rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej układów dyspersyjnych $f(a)$ są funkcjami gładkimi³⁶. Można zastosować różne ilościowe miary gładkości funkcji $f(a)$. Uwzględnienie warunku gładkości rozwiązania $\hat{f}(a)$ powoduje, że zamiast rozwiązania najmniejszych kwadratów z minimalną normą $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$ oryginalnego słabo uwarunkowanego problemu (4.17) znajdowane jest rozwiązanie najmniejszych kwadratów z minimalną normą innego, lecz bliskiego mu problemu charakteryzującego się lepszym uwarunkowaniem. Zagadnienie to zwane jest zagadnieniem zregularyzowanym, a jego rozwiązanie – rozwiązaniem zregularyzowanym $\hat{\mathbf{f}}_{LSMNR\text{eg}}$ ^{33, 34, 36, 50–53}.

Niezależnie od przyjętej miary gładkości funkcji $f(a)$, warunek gładkości uwzględnić można ogólnie poprzez wprowadzenie odpowiednich współczynników wagowych t_n , $n = 1, \dots, r$ do rozwiązania



(4.35) lub równoważnego (4.39), co daje następujące rozwiązanie zre-
gularyzowane^{33, 34, 36, 54-56}:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LSMNReg} = \sum_{n=1}^r t_n \frac{\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \mathbf{v}_n. \quad 4.57$$

Współczynniki wagowe t_n zwane są również współczynnikami fil-
trującymi^{33, 34, 36, 54, 55}. Definiując macierz diagonalną:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_r \end{bmatrix}, \quad 4.58$$

rozwiązanie zreregularyzowane można zapisać w postaci³³:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LSMNReg} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{T}\Sigma^{-1} & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \mathbf{0}_{q-r,r} & \mathbf{0}_{q-r,p-r} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{g}}. \quad 4.59$$

Przyjmując oznaczenie³³:

$$\mathbf{K}^\# = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{T}\Sigma^{-1} & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \mathbf{0}_{q-r,r} & \mathbf{0}_{q-r,p-r} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T \quad 4.50$$

można zapisać⁴³³:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LSMNReg} = \mathbf{K}^\# \tilde{\mathbf{g}}. \quad 4.61$$

Macierz $\mathbf{K}^\#$ nazywana jest macierzą regularyzacji³³. Współczynniki
filtrujące często, choć nie zawsze, spełniają warunek³³:

$$0 \leq t_n \leq 1, \quad n = 1, \dots, r. \quad 4.62$$

Macierz $\mathbf{T}$ w pełni charakteryzuje daną procedurę regularyzacji.

Operację wygładzania przy wyznaczaniu rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{LSMNReg}$
w oparciu o wzór (4.57) realizuje się poprzez odpowiedni dobór
współczynników filtrujących t_n . W związku z apriorycznym zało-
żeniem o gładkości funkcji $f(a)$ współczynniki rozwinięcia (4.39)
prawdziwego rozwiązania $\mathbf{f}_{LSMN}$ na wektory osobliwe $\mathbf{v}_n$ stojące przy
wielkoczęstotliwościowych wektorach $\mathbf{v}_n$ o większych indeksach
 $n - \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_n \rangle / \sigma_n$ powinny posiadać małe wartości. Jak wynika z za-
leżności (4.52), obserwowane w rzeczywistości olbrzymie wartości

współczynników rozwinięcia rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$ na wektory osobliwe $\mathbf{v}_n$ o większych indeksach $n - \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_n \rangle / \sigma_n$ są zdominowane przez składową $\langle \mathbf{e}, \mathbf{u}_n \rangle / \sigma_n$ pochodzącą od szumu, która dla dużych n jest ciągle znaczna w związku z oscylacyjnym przebiegiem szumu i istotnie przewyższa składową $\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_n \rangle / \sigma_n$ pochodzącą od gładkiej nie zakłóconej funkcji $g(y)$. Zatem współczynniki rozwinięcia $\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle / \sigma_n$ dla dużych n niosą znikomą informację o prawdziwym rozwiązaniu $\mathbf{f}_{LSMN}$ i reprezentują błąd tego rozwiązania $\mathbf{r}$ pochodzący od szumu $\mathbf{e}$. Stąd odpowiednie wytłumienie – „odfiltrowanie” składników $\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle \mathbf{v}_n / \sigma_n$ dla dużych n istotnie zmniejsza niepewność rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$, powodując nieznaczną tylko utratę informacji niesionej przez dane pomiarowe $\tilde{\mathbf{g}}$ ³⁶. Wynika stąd, że współczynniki filtrujące powinny być dobrane tak, by w największym stopniu tłumione były wielkoczęstotliwościowe wyrazy rozwinięcia (4.52) rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$ na wektory osobliwe $\mathbf{v}_n$ odpowiadające większym indeksom n , lub równoważnie mniejszym wartościom osobliwym σ_n ³⁶. Filtracja powinna minimalizować utratę informacji niesionej przez dane pomiarowe $\tilde{\mathbf{g}}$, jednocześnie w jak największym stopniu eliminując z rozwiązania oscylacyjne artefakty, a tym samym zmniejszając niepewność tego rozwiązania³⁶. Zaproponowano wiele sposobów doboru współczynników filtracji^{33, 34, 36, 54–56}.

4.4.1 Regularyzacja Tichonowa

W regularyzacji Tichonowa współczynniki filtrujące określone są przez wyrażenie^{33, 34, 36, 51–53}:

$$t_n = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \lambda^2}, \quad n = 1, \dots, r, \quad 4.63$$

gdzie $\lambda > 0$ to parametr regularyzacji.

Można wykazać, że w przypadku, gdy macierz $\mathbf{K}$ posiada pełen rząd kolumnowy, czyli $r = q < p$, rozwiązanie zregularyzowane dane wzorem (4.59) przy współczynnikach filtrujących (4.63) jest wektorem $\hat{\mathbf{f}}_{LSTich}$ o postaci^{33, 34, 36, 51–53}:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LSTich} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{f}\|_2^2 \right\}. \quad 4.64$$

Najbardziej ogólną postać zregularyzowanego rozwiązania Tichonowa określa wzór^{33, 34, 36, 51-53, 57, 58}:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LSTich} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{L}(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*)\|_2^2 \right\}, \quad 4.65$$

gdzie: $\mathbf{L}$ to macierz o liczbie kolumn q , $\mathbf{f}^*$ to rozwiązanie zagadnienia odwrotnego założone *a priori*.

Dla $\mathbf{L} = \mathbf{I}_q$, gdzie $\mathbf{I}_q$ – macierz jednostkowa o wymiarze $q \times q$ oraz $\mathbf{f}^* = \mathbf{0}_q$ rozwiązanie (4.65) przyjmuje szczególną postać (4.64). Stosując odpowiednie transformacje, możliwe jest przekształcenie postaci ogólnej zagadnienia (4.65) w tzw. postać standardową daną wyrażeniem³⁴:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LSTich,std} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \|\bar{\mathbf{g}} - \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{f}}\|_2^2 + \lambda^2 \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^*\|_2^2 \right\}, \quad 4.66$$

gdzie pozioma kreska nad symbolami wektorów i macierzy oznacza ich postacie po transformacji.

Zagadnienie minimalizacyjne (4.65) można przedstawić jako problem minimalizacji funkcji^{36, 57, 58}:

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{L}(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*)\|_2^2 \quad 4.67$$

z ograniczeniem nierównościowym^{58, 57}:

$$\|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\mathbf{f}\|_2^2 < \varepsilon. \quad 4.68$$

gdzie $\varepsilon > 0$ – zadana niewielka wartość. Zatem:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LSTich} = \min_{\mathbf{f}: \|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\mathbf{f}\|_2^2 < \varepsilon} \{J(\mathbf{f})\}. \quad 4.69$$

Wyrażenie (4.65) stanowi rezultat przekształcenia zagadnienia minimalizacji z ograniczeniem (4.69) w zagadnienie minimalizacji bez ograniczeń z zastosowaniem metody mnożników Lagrange’a. Rolę mnożnika Lagrange’a spełnia w tym przypadku parametr regularyzacji^{58, 57}.

Ze wzoru (4.69) wynika, że zregularyzowanym rozwiązaniem zagadnienia odwrotnego (4.17) jest wektor $\hat{\mathbf{f}}_{LSTich}$, który minimalizuje funkcję $J(\mathbf{f})$, zapewniając jednocześnie ustaloną niewielką wartość odchylenia wyjścia modelu dla rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{LSTich} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{f}}_{LSTich}$ od rzeczywistych danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$, zgodnie z warunkiem (4.68).

Wyrażenie $\|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\mathbf{f}\|_2^2$ stanowi wielkość minimalizowaną przez zwykłe rozwiązanie najmniejszych kwadratów (4.48) i stanowi miarę zgodności rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{LS}$ z danymi pomiarowymi $\tilde{\mathbf{g}}$. W rezultacie słabego uwarunkowania rozwiązanie $\hat{\mathbf{f}}_{LS}$ charakteryzuje się olbrzymią niepewnością $\Delta\hat{\mathbf{f}}_{LS}$, co jakościowo traktować można jako niejednoznaczność rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{LS}$, ponieważ istnieje cały szeroki przedział wektorów $[\hat{\mathbf{f}}_{LS} - \Delta\hat{\mathbf{f}}_{LS}, \hat{\mathbf{f}}_{LS} + \Delta\hat{\mathbf{f}}_{LS}]$ spełniających warunek (4.68), czyli zgodnych z danymi pomiarowymi z dokładnością do ε^{36} . W procedurze regularyzacji z całego szerokiego zakresu wektorów $\hat{\mathbf{f}}_{LS}$ wybiera się ten, który spełnia nałożony *a priori* warunek minimalizacji funkcji $J(\mathbf{f})$. Wyrażenie $J(\mathbf{f})$ stanowi miarę odstępstwa wektora $\mathbf{f}$ od apriorycznie założonego charakteru. Zatem warunek minimalizacji przez poszukiwane rozwiązanie odstępstwa od apriorycznie ustalonej charakterystyki dookreśla to rozwiązanie, zmniejszając jego niepewność. Funkcja $J(\mathbf{f})$ nazywana jest funkcją kary^{33, 51–53}.

Jak uzasadniono we wcześniejszych rozważaniach, założoną *a priori* charakterystyką poszukiwanego rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{LS\text{Rich}}$ powinna być gładkość funkcji $\hat{f}_{LS\text{Rich}}(a)$. Miarę braku gładkości funkcji $f(a)$ ogólnie wyrazić można wzorem (4.67) dla $\mathbf{f}^* = \mathbf{0}_q$, czyli^{33, 36, 34, 57, 58}:

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{L}\mathbf{f}\|_2^2. \quad 4.70$$

Najczęściej stosowanymi miarami są^{33, 36, 34, 57, 58}:

- norma euklidesowa wektora $\mathbf{f}$, której odpowiada macierz:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_q, \quad 4.71$$

- norma euklidesowa wektora różnic s -tego rzędu wektora $\mathbf{f}$, której odpowiada macierz pasmowa o wymiarze $(q-s) \times q - \mathbf{L}_{s, (q-s) \times q}$. Dla kilku początkowych s macierz ta przyjmuje następujące postacie^{33, 57}:

- dla $s = 1$:

$$\mathbf{L}_{1, (q-1) \times q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad 4.72$$



– dla $s = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{2,(q-2) \times q} &= \mathbf{L}_{1,(q-2) \times (q-1)} \mathbf{L}_{1,(q-1) \times q} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad 4.73$$

– dla $s = 3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{3,(q-3) \times q} &= \mathbf{L}_{1,(q-3) \times (q-2)} \mathbf{L}_{2,(q-2) \times q} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -3 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad 4.74$$

przy czym:

$$\mathbf{L}_{s,(q-s) \times q} = \mathbf{L}_{1,(q-s) \times (q-s+1)} \mathbf{L}_{s-1,(q-s+1) \times q}. \quad 4.75$$

Dla $\mathbf{f}^* \neq \mathbf{0}_q$ funkcja kary $J(\mathbf{f})$ stanowi miarę odstępstwa wektora $\mathbf{f}$ od założonego *a priori* rozwiązania $\mathbf{f}^*$. Jeżeli $\mathbf{L} = \mathbf{I}_q$, to odstępstwo mierzone jest normą euklidesową wektora różnicy $(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*)$.

Można wykazać, że rozwiązaniem problemu (4.65) jest⁵⁷:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LSTich} = (\mathbf{K}^T \mathbf{K} + \lambda \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{K}^T \tilde{\mathbf{g}} + \lambda \mathbf{L} \mathbf{f}^*). \quad 4.76$$

Należy zauważyć, że dla $\lambda = 0$ zregularyzowane zagadnienie odwrotne (4.65) przechodzi w wyjściowe słabo uwarunkowane zagadnienie wyznaczania zwykłego rozwiązania najmniejszych kwadratów (4.48) układu równań (4.17). Fakt ten uzasadnia nazywanie rozwiązania zregularyzowanego jako rozwiązania najmniejszych kwadratów z karą. Wraz ze wzrostem parametru regularyzacji λ problem zregularyzowany coraz bardziej różni się od problemu oryginalnego, co sprawia, że rozwiązanie zregularyzowane $\hat{\mathbf{f}}_{LSTich}$ wykazuje coraz większe odstępstwo od prawdziwego rozwiązania najmniejszych kwadratów (4.48). Jednocześnie jednak zwiększanie parametru λ powoduje poprawę uwarunkowania numerycznego

zagadnienia zregularyzowanego^{33, 34, 36}. Wynika to bezpośrednio z następującego rozumowania. Zapisując wzór (4.63) w postaci:

$$t_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{\sigma_n}\right)^2}, \quad n = 1, \dots, r, \quad 4.77$$

zauważa się, że współczynniki filtrujące t_n maleją wraz ze wzrostem λ w stopniu tym większym im mniejsza jest odpowiadająca temu współczynnikowi wartość osobliwa σ_n . Oznacza to silniejsze tłumienie wyrazów rozwinięcia (4.57) o większych n , a w związku z tym – minimalizację wielkości błędu rozwiązania $\|\mathbf{r}\|^2$ przy zadanej wielkości szumu $\|\mathbf{e}\|^2$ w danych pomiarowych.

Reasumując, parametr regularyzacji λ powinien być dobierany w drodze kompromisu pomiędzy zgodnością rozwiązania z danymi pomiarowymi w sensie wielkości $\|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\mathbf{f}\|_2^2$ a uwarunkowaniem zregularyzowanego zagadnienia odwrotnego³⁶.

4.4.2 Regularyzacja Tichonowa z ograniczeniami

Klasyczna regularyzacja Tichonowa nie uwzględnia dwóch ograniczeń fizycznych, które powinna spełniać szukana funkcja rozkładu wielkości cząstek fazy zdyspergowanej układu dyspersyjnego $f(a)$:

- warunku nieujemności funkcji $f(a)$:

$$f(a) \geq 0 \text{ dla każdego } a \in (0, \infty), \quad 4.78$$

- warunku unormowania funkcji $f(a)$ do jedności:

$$\int_0^\infty f(a) da = 1. \quad 4.79$$

Dyskretnymi odpowiednikami tych ograniczeń są odpowiednio:

- dyskretny warunek nieujemności:

$$\mathbf{f} \geq \mathbf{0}_q, \quad 4.80$$

- dyskretny warunek unormowania do jedności, który uzyskuje się przez założenie, że funkcja $f(a)$ przyjmuje znaczne wartości jedynie w pewnym ograniczonym przedziale $[a_{\min}, a_{\max}]$, a poza nim jej wartości są zaniedbywalnie małe, co umożliwia zastąpie-



nie występującej w równaniu (4.79) całki w przedziale $[0, \infty)$ za pomocą całki w skończonym przedziale $[a_{\min}, a_{\max}]$:

$$\int_0^{\infty} f(a) da \approx \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} f(a) da, \quad 4.81$$

którą następnie można aproksymować za pomocą kwadratury numerycznej:

$$\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} f(a) da \approx \sum_{j=1}^q w_j f(a_j). \quad 4.82$$

Po uwzględnieniu wyrażeń (4.81) i (4.82), dyskretny warunek unormowania do jedności przyjmuje postać:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{f} = 1, \quad 4.83$$

gdzie:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_q \end{bmatrix}^T. \quad 4.84$$

Nieuwzględnienie podanych warunków powoduje, że klasyczna regularyzacja Tichonowa nie zapewnia uzyskania rozwiązań posiadających sens fizyczny – nieujemnych i unormowanych do jedności³⁶.

Zregularyzowane rozwiązanie Tichonowa stanowi rozwiązanie problemu minimalizacji bez ograniczeń (4.65). Uwzględnienie w tym problemie ograniczeń (4.83) oraz (4.84) prowadzi do zagadnienia minimalizacji z ograniczeniami. Dla $\mathbf{f}^* = \mathbf{0}_q$ otrzymuje się następujące wyrażenie określające zregularyzowane rozwiązanie Tichonowa z ograniczeniami, zwane również rozwiązaniem najmniejszych kwadratów z karą i ograniczeniami:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{LSTichOgr} &= \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ (\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\mathbf{f})^T (\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\mathbf{f}) + \lambda^2 (\mathbf{L}\mathbf{f})^T (\mathbf{L}\mathbf{f}) \right\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \tilde{\mathbf{g}}^T \tilde{\mathbf{g}} - 2\tilde{\mathbf{g}}^T \mathbf{K}\mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{f} + \lambda^2 \mathbf{f}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{f} \right\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \mathbf{f}^T (\mathbf{K}^T \mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{L}^T \mathbf{L}) \mathbf{f} - 2\tilde{\mathbf{g}}^T \mathbf{K}\mathbf{f} \right\}, \end{aligned} \quad 4.85$$

przy ograniczeniach (4.80) i (4.83) (6.4.2.3). Oznaczając:

$$\mathbf{A} = 2(\mathbf{K}^T \mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{L}^T \mathbf{L}), \quad 4.86$$

$$\mathbf{b} = -2\mathbf{K}^T \tilde{\mathbf{g}}, \quad 4.87$$

wyrażeniu (4.85) można nadać postać:

$$\hat{\mathbf{f}}_{LSTichOgr} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{f} + \mathbf{b}^T \mathbf{f} \right\}. \quad 4.88$$

Z postaci wzoru (4.88) oraz ograniczeń (4.80) i (4.83) wynika, że rozważany problem minimalizacji z ograniczeniami stanowi zagadnienie programowania kwadratowego^{59, 60}. W związku z tym do wyznaczenia zregulowanego rozwiązania Tichonowa z ograniczeniami można się posłużyć standardowymi technikami programowania kwadratowego. W badaniach prowadzonych przez autora zastosowano metodę aktywnego zbioru.

4.4.3 Obcięty rozkład na wartości osobliwe

Rozwiązanie oparte na obciętym rozkładzie na wartości osobliwe (*Truncated Singular Value Decomposition*, TSVD) uzyskuje się poprzez zastosowanie współczynników filtrujących danych wzorem^{33, 34, 36, 56, 61}:

$$t_n = \begin{cases} 1, & n \leq l, \\ 0, & n > l, \end{cases} \quad 4.89$$

gdzie $l \leq r$ jest ustaloną *a priori* liczbą.

Uwzględniając wzór (4.89) w wyrażeniu (4.63), uzyskuje się zregulowane rozwiązanie TSVD^{33, 34, 36}:

$$\hat{\mathbf{f}}_{TSVD} = \sum_{n=1}^l \frac{\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \mathbf{v}_n. \quad 4.90$$

Jak wynika ze wzoru (4.90), rozwiązanie TSVD powstaje poprzez obcięcie rozwinięcia (4.52), określającego rozwiązanie $\hat{\mathbf{f}}_{LSMN}$, na wyrazie l . W ten sposób l pierwszych wyrazów o indeksach $n = 1, \dots, l$ pozostaje nie zmienionych, natomiast następne $(r - l)$ o indeksach $n = l + 1, \dots, r$ zostaje zaniedbanych w rozwiązaniu $\hat{\mathbf{f}}_{TSVD}$ ^{33, 34, 36}. Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami powoduje to poprawę uwarunkowania rozwiązania kosztem niewielkiej utraty informacji zawartej w pominiętych wyrazach rozwinięcia (4.52)³⁶.

Obcięcie rozwinięcia (4.52) wiąże się z wygładzeniem zregulowanego rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{TSVD}$ w stopniu tym większym, im mniejsza jest liczba l uwzględnianych w tym rozwinięciu wyrazów. Procedura obcięcia stanowi więc formę wiedzy apriorycznej dotyczącej gładkości rozwiązania, a liczba l ilościową postać tej informacji.



Wielkość l stanowi parametr regularyzacji dla rozwiązania TSVD. Podobnie, jak parametr λ w regularyzacji Tichnowa, wartość l powinna być dobierana w drodze kompromisu pomiędzy zgodnością rozwiązania z danymi pomiarowymi w sensie wielkości $\|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\mathbf{f}\|_2^2$ a uwarunkowaniem zregularyzowanego zagadnienia odwrotnego. Zmniejszanie parametru l powoduje poprawę uwarunkowania kosztem pogorszenia zgodności rozwiązania z danymi pomiarowymi^{36, 62}.

4.4.4 Dobór parametru regularyzacji

Istnieje wiele procedur doboru parametrów regularyzacji, podejmujących próbę ustalenia kompromisu pomiędzy zgodnością rozwiązania z danymi pomiarowymi a uwarunkowaniem zregularyzowanego zagadnienia odwrotnego^{33, 34, 36, 62–64}. Metody te stosowane są do poszukiwania optymalnych wartości zarówno parametrów zmieniających się w sposób ciągły, jak parametr λ w regularyzacji Tichonowa, jak i w sposób skokowy, jak będący liczbą naturalną parametr l w rozwiązaniu TSVD. W dalszych rozważaniach parametr regularyzacji oznaczany będzie ogólnie γ .

- *Zasada rozbieżności*

Zasada rozbieżności (*discrepancy principle*) zakłada, że znana jest estymata błędu pomiarowego^{33, 34, 36, 65}:

$$\hat{\varepsilon} = \|\hat{\mathbf{e}}\|_2 = \|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}\|_2. \quad 4.91$$

Metoda polega na doborze takiego parametru regularyzacji γ , że euklidesowa norma wektora rezyduów odpowiadającego rozwiązaniu zregularyzowanemu uzyskanemu dla parametru $\gamma - \hat{\mathbf{f}}_{Reg, \gamma}$ spełnia warunek^{33, 34}:

$$\|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{f}}_{Reg, \gamma}\|_2 = \hat{\varepsilon}. \quad 4.92$$

Jeżeli kryterium (4.92) spełniane jest przez więcej niż jedną wartość γ , to wybierana jest ta odpowiadająca większemu stopniowi regularyzacji, ponieważ zapewnia ona lepsze uwarunkowanie zagadnienia poprzez silniejsze wygładzanie rozwiązania^{33, 34}.

Gdy warunek (4.92) nie jest spełniony w sposób dokładny przez żadną z wartości γ , co typowo ma miejsce w przypadku γ będącego

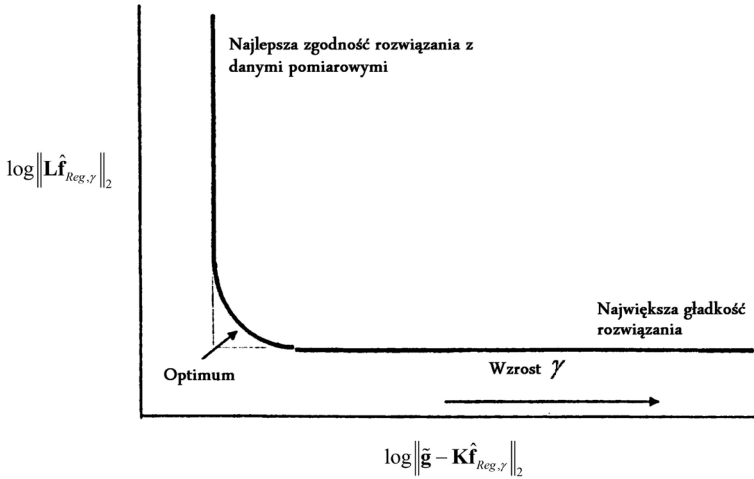
liczbą naturalną (np. w metodzie TSVD), wybierana jest wartość γ minimalizująca różnicę pomiędzy lewą i prawą stroną równania (4.92)^{33, 34}.

- *Kryterium krzywej L*

Krzywą L (*L-curve*) nazywa się wykres utworzony przez punkty o współrzędnych^{33, 34, 36, 63}:

$$\left(\log \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K} \hat{\mathbf{f}}_{Reg, \gamma} \right\|_2, \log \left\| \mathbf{L} \hat{\mathbf{f}}_{Reg, \gamma} \right\|_2 \right). \quad 4.93$$

dla parametru regularyzacji γ zmieniającego się w sposób ciągły lub skokowy w określonym zakresie. Typowy przebieg krzywej L ilustruje Rys. 4.1.



Rys. 4.1. Typowa postać krzywej L³⁰.

Nazwa wykresu wynika z tego, że typowo przybiera on kształt litery „L”. Fakt ten wyjaśnić można w oparciu o następujące rozumowanie. Na podstawie wzoru (4.63) dla regularyzacji w postaci standardowej, czyli dla $\mathbf{L} = \mathbf{I}_q$, zachodzi związek³³:

$$\left\| \mathbf{L} \hat{\mathbf{f}}_{Reg, \gamma} \right\|_2^2 = \left\| \hat{\mathbf{f}}_{Reg, \gamma} \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^r t_n^2 \frac{\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle^2}{\sigma_n^2}. \quad 4.94$$

Ponadto:

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{f}}_{Reg, \gamma} = \mathbf{K} \sum_{n=1}^r t_n \frac{\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \mathbf{v}_n = \sum_{n=1}^r t_n \frac{\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle}{\sigma_n} \mathbf{K} \mathbf{v}_n. \quad 4.95$$

Uwzględniając zależność (4.43), otrzymuje się:

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{f}}_{Reg,\gamma} = \sum_{n=1}^r t_n \langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle \mathbf{u}_n. \quad 4.96$$

Dla wektora $\tilde{\mathbf{g}}$ można natomiast przedstawić rozwinięcie w bazie ortonormalnej utworzonej przez kolumny macierzy $\mathbf{U}$ pochodzącej z rozkładu macierzy $\mathbf{K}$ na wartości osobliwe:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \sum_{n=1}^p \langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle \mathbf{u}_n. \quad 4.97$$

Biorąc pod uwagę wyrażenia (4.96) i (4.97), uzyskuje się:

$$\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{f}}_{Reg,\gamma} = \sum_{n=1}^r (1 - t_n) \langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle \mathbf{u}_n + \sum_{n=r+1}^p \langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle \mathbf{u}_n. \quad 4.98$$

co ostatecznie daje:

$$\|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{f}}_{Reg,\gamma}\|_2^2 = \sum_{n=1}^r (1 - t_n)^2 \langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle^2 + \sum_{n=r+1}^p \langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{u}_n \rangle^2. \quad 4.99$$

W przypadku, gdy wartości parametru γ odpowiadają niewielkiemu stopniowi regularyzacji, współczynniki filtrujące³³:

$$t_n \approx 1, \quad n = 1, \dots, r. \quad 4.100$$

W tym zakresie wartości współczynników t_n wyrażenia t_n^2 zmieniają się znacznie szybciej przy niewielkich zmianach t_n niż wyrażenia $(1 - t_n)^2$. Zatem zgodnie ze wzorami (4.94) i (4.99) niewielkie zmiany współczynników t_n wywołane zmianą parametru γ powodują znacznie szybszą zmianę wartości $\log \|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{f}}_{Reg,\gamma}\|_2$ niż wartości $\log \|\mathbf{L}\hat{\mathbf{f}}_{Reg,\gamma}\|_2$. Odpowiada to niemal pionowemu przebiegowi krzywej L w zakresie wartości parametru γ wiążących się z niewielkim stopniem regularyzacji³³.

W przypadku, gdy wartości parametru γ odpowiadają znacznemu stopniowi regularyzacji, współczynniki filtrujące³³:

$$t_n \approx 0, \quad n = 1, \dots, r. \quad 4.101$$

W tym zakresie wartości współczynników t_n wyrażenia t_n^2 zmieniają się znacznie wolniej przy niewielkich zmianach t_n niż wyrażenia $(1 - t_n)^2$. Zatem zgodnie ze wzorami i niewielkie zmiany współczynników t_n wywołane zmianą parametru γ powodują znacznie wolniejszą zmianę wartości $\log \|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{f}}_{Reg,\gamma}\|_2$ niż wartości

$\log \|\mathbf{L}\hat{\mathbf{f}}_{Reg,\gamma}\|_2$. Odpowiada to niemal poziomemu przebiegowi krzywej L w zakresie wartości parametru γ wiążących się ze znacznym stopniem regularyzacji³³. Metoda krzywej L poszukuje optymalnej wartości parametru regularyzacji γ jako wartości γ odpowiadającej punktowi leżącemu w rogu krzywej L, tzn. punktowi opowiadającemu maksymalnej krzywiznie^{33, 34, 36, 63}.

W przypadku gdy parametr γ jest liczbą naturalną (np. w metodzie TSVD), otrzymuje się wykres złożony z izolowanych punktów, czyli tzw. dyskretną krzywą L. W celu wyznaczenia optymalnej wartości parametru γ , znajduje się ciągłą krzywą L dopasowaną do punktów dyskretnej krzywej L, a następnie wyznacza róg krzywej ciągłej. Punkt dyskretnej krzywej L najbliższy wyznaczonemu rogowi krzywej ciągłej uznaje się za róg dyskretnej krzywej L, a odpowiadającą mu wartość γ za optymalną wartość parametru regularyzacji³⁴.

- *Uogólniona walidacja wzajemna*

Metoda uogólnionej walidacji wzajemnej (*Generalized Cross-Validation, GCV*) opiera się na spostrzeżeniu, że jeżeli usunięty zostałby dowolnie wybrany element $\tilde{g}_n$, $n = 1, \dots, p$, wektora danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$, rozwiązanie zregularyzowane $\hat{\mathbf{f}}_{Reg,\gamma}$ powinno umożliwiać poprawne przewidzenie tego elementu^{34, 36, 64}. Dodatkowo w podejściu GCV postuluje się, że wybór parametru regularyzacji ma być niezależny od transformacji ortogonalnych wektora $\tilde{\mathbf{g}}$ ³⁴. Prowadzi to do uznania za optymalną wartość parametru regularyzacji takiej wartości γ , która minimalizuje funkcję^{33, 34}:

$$G(\gamma) = \frac{\|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{f}}_{Reg,\gamma}\|_2^2}{\left(\text{tr}(\mathbf{I}_p - \mathbf{K}\mathbf{K}_\gamma^\#)\right)^2}, \quad 4.102$$

gdzie: $\text{tr}(\mathbf{A})$ to operator wyznaczania śladu macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$, $\mathbf{K}_\gamma^\#$ to macierz regularyzacji dana wzorem (4.60) dla parametru regularyzacji γ , stosowana do obliczania rozwiązania zregularyzowanego $\hat{\mathbf{f}}_{Reg,\gamma}$ na podstawie danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$ zgodnie ze wzorem^{33, 34}:



$$\hat{\mathbf{f}}_{reg,\gamma} = \mathbf{K}_{\gamma}^{\#} \tilde{\mathbf{g}}.$$

4.103

Wzór (4.102) używany może być dla parametrów regularyzacji zmieniających się zarówno w sposób ciągły, jak i skokowy^{33, 34}.

W kategoriach jakościowych uzasadnieniem przyjętej postaci (4.102) minimalizowanej funkcji $G(\gamma)$ jest fakt, że licznik stanowi kwadrat normy euklidesowej wektora rezyduów, będący miarą braku zgodności rozwiązania $\gamma \hat{\mathbf{f}}_{reg,\gamma}$ z danymi pomiarowymi $\tilde{\mathbf{g}}$, natomiast mianownik stanowi miarę stopnia regularyzacji zagadnienia – zwiększa się wraz ze wzrostem stopnia regularyzacji³³. Minimalizacja funkcji $G(\gamma)$ odpowiada więc osiągnięciu jak najlepszej zgodności rozwiązania $\hat{\mathbf{f}}_{reg,\gamma}$ z danymi pomiarowymi $\tilde{\mathbf{g}}$ (minimalizacja licznika) przy jednoczesnym jak najwyższym stopniu regularyzacji (maksymalizacja mianownika)³³. Wyznaczana w ten sposób wartość parametru regularyzacji, stanowi kompromis pomiędzy zapewnieniem zgodności rozwiązania z danymi pomiarowymi a poprawą uwarunkowania zregularyzowanego zagadnienia odwrotnego.

4.5 NIELINIOWE ITERACYJNE METODY INWERSYJNE

Omawiane dotąd różne odmiany regularyzacji zagadnienia odwrotnego należą do liniowych technik inwersyjnych, ponieważ rozwiązanie zależy w nich w sposób liniowy od wektora danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$ ^{36, 66–69}.

W nieliniowych iteracyjnych metodach inwersyjnych przyjmowane jest pewne rozwiązanie początkowe $\mathbf{f}^{(0)}$ oparte zwykle na posiadanej wiedzy apriorycznej o rozważanym problemie. Następnie rozwiązanie początkowe poddawane jest sukcesywnym udoskonaleniom polegającym na mnożeniu tego rozwiązania w kolejnych iteracjach przez czynniki korekcyjne $c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(k_{iter})}$, gdzie k_{iter} jest liczbą wszystkich iteracji^{36, 66–69}. Zatem rozwiązanie w k -tej iteracji, $\mathbf{f}^{(k)}$, uzyskiwane jest przez pomnożenie rozwiązania z iteracji $(k-1)$ -szej, $\mathbf{f}^{(k-1)}$, przez obliczony w iteracji k -tej czynnik korekcyjny $c^{(k)}$ zgodnie z zależnością^{36, 66–69}:

$$\mathbf{f}^{(k)} = c^{(k)} \mathbf{f}^{(k-1)}$$

4.104

Czynniki korekcyjne $c^{(k)}$ wyznaczone są w poszczególnych iteracjach na podstawie danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$, bieżącego rozwiązania $\mathbf{f}^{(k-1)}$ oraz stosowanej informacji apriorycznej. Procedura iteracyjna powinna być zbieżna, czyli rozwiązania otrzymywane w kolejnych iteracjach powinny cechować się coraz lepszą zgodnością z danymi pomiarowymi $\tilde{\mathbf{g}}$ oraz z założoną *a priori* charakterystyką. Rozwiązania $\mathbf{f}^{(k)}$ powinny zbiegać do prawdziwego rozwiązania $\mathbf{f}^{36, 66-69}$.

Z uwagi na multiplikatywny charakter iteracyjnych poprawek przebiegających zgodnie ze wzorem (4.104) oraz zależnością czynników korekcyjnych $c^{(k)}$ od bieżącego rozwiązania, metody te określane są jako nieliniowe^{36, 66-69}.

W badaniach prowadzonych przez zespół Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej stosowane były następujące nieliniowe procedury iteracyjne:

- metoda Twomeya,
- metoda Twomeya-Markowskiego.

4.5.1 Metoda Twomeya

W metodzie Twomeya poprawki iteracyjne przebiegają według wzoru^{36, 67, 69, 68}:

$$\begin{aligned} f_j^{(k+1)} &= \left(1 + r_i^{(k)} K(y_i, a_j)\right) f_j^{(k)} \\ &= \left(1 + r_i^{(k)} w_j^{-1} K_{ij}\right) f_j^{(k)}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \end{aligned} \quad 4.105$$

gdzie:

$$r_i^{(k)} = \frac{\tilde{g}_i}{\sum_{j=1}^q K_{ij} f_j^{(k)}} - 1 = \frac{\tilde{g}_i}{\mathbf{k}_i \mathbf{f}^{(k)}} - 1, \quad 4.106$$

przy czym $\mathbf{k}_i$ oznacza i -ty wiersz macierzy $\mathbf{K}$.

Jak wynika z zależności (4.106), współczynniki $r_i^{(k)}$ są równe pomniejszonym o jeden stosunkom rzeczywistych wyników pomiarów $\tilde{g}_i$ do odpowiadających im wartości teoretycznych g_i obliczanych jako wyjście modelu matematycznego (4.17) dla bieżącego rozwiązania $\mathbf{f}^{(k)}$ ^{36, 67, 69, 68}:

$$g_i = \mathbf{k}_i \mathbf{f}^{(k)}. \quad 4.107$$



Na początku każdej iteracji obliczane są współczynniki $r_i^{(k)}$ w oparciu o wzór (4.106) dla $i = 1, \dots, p$ na podstawie bieżącego rozwiązania $\mathbf{f}^{(k)}$. Następnie wyznaczone współczynniki wykorzystywane są w danej iteracji do poprawek wartości $f_j^{(k)}$ przebiegających według wzoru (4.105) dla $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ ^{67, 68}.

Stosowane są różne kryteria zatrzymania dla procedury iteracyjnych poprawek w metodzie Twomeya. Najczęściej wykorzystuje się jeden z trzech warunków^{36, 69, 68}:

1. Osiągnięcie zadowalającej zgodności rzeczywistych danych pomiarowych $\tilde{g}_i$ z odpowiednimi wartościami teoretycznymi g_i obliczonymi dla bieżącego rozwiązania $\mathbf{f}^{(k)}$ w oparciu o wzór (4.107). Przez zadowalającą zgodność rozumie się sytuację, gdy różnice $(\tilde{g}_i - g_i)$ są bliskie niepewnościom pomiarowym wyników $\tilde{g}_i$. Przyjmując za miarę tych niepewności odchylenia standardowe błędów pomiarowych wielkości $\tilde{g}_i$ oznaczone σ_i , rozważany warunek można ściśle sformułować z zastosowaniem wartości statystyki chi-kwadrat^{36, 69, 68}:

$$\hat{\chi}_{(k)}^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left(\frac{\tilde{g}_i - \mathbf{k}_i \mathbf{f}^{(k)}}{\sigma_i} \right)^2. \quad 4.108$$

$\hat{\chi}_{(k)}^2$ jest miarą średniej rozbieżności pomiędzy rzeczywistymi danymi pomiarowymi $\tilde{g}_i$ a odpowiednimi wartościami teoretycznymi g_i odniesionej do niepewności pomiarowych. W związku z tym, warunkiem zatrzymania procedury iteracyjnych poprawek jest osiągnięcie etapu, gdy⁶⁸:

$$\hat{\chi}_{(k)}^2 < 1. \quad 4.108$$

2. Osiągnięcie stanu, gdy zmniejszenie wartości $\hat{\chi}_{(k)}^2$ w stosunku do wartości z poprzedniej iteracji $\hat{\chi}_{(k-1)}^2$ jest mniejsze od założonego poziomu⁶⁹. Oznacza to, że kontynuowanie procedury iteracyjnych korekt rozwiązania nie powoduje już znaczącej poprawy zgodności rzeczywistych danych pomiarowych $\tilde{g}_i$ z odpowiednimi wartościami teoretycznymi g_i . Innymi słowy, algorytm osiągnął już rozwiązanie dostatecznie bliskie rozwiązaniu prawdziwemu⁶⁹. Zwykle za warunek zatrzymania algorytmu przyjmuje się stan,

gdy procentowe zmniejszenie wartości $\hat{\chi}_{(k)}^2$ w stosunku do wartości $\hat{\chi}_{(k-1)}^2$ jest mniejsze od ustalonej wielkości α wynoszącej np. 5%⁶⁹:

$$\frac{\hat{\chi}_{(k)}^2 - \hat{\chi}_{(k-1)}^2}{\hat{\chi}_{(k-1)}^2} \cdot 100 < \alpha. \quad 4.110$$

3. Osiągnięcie stanu, gdy zmiana rozwiązania $\mathbf{f}^{(k)}$ w stosunku do rozwiązania z poprzedniej iteracji $\mathbf{f}^{(k-1)}$ jest mniejsza od założonego poziomu³⁵. Oznacza to, że kolejne iteracje praktycznie nie spowodują już dalszej poprawy rozwiązania, gdyż algorytm osiągnął już rozwiązanie bliskie rozwiązaniu prawdziwemu³⁵. Zwykle za warunek zatrzymania algorytmu przyjmuje się stan, gdy³⁵:

$$\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}^{(k-1)}\|_2^2 < \delta, \quad 4.111$$

gdzie δ to ustalona mała wartość dodatnia, np. 10^{-6} .

Słabe uwarunkowanie zagadnienia odwrotnego (4.17) powoduje znaczne spowolnienie lub nawet zanik zbieżności algorytmu Twomeya^{35, 68}. Aby zapobiec wpadnięciu algorytmu w nieskończoną pętlę, często wprowadza się dodatkowy warunek zakończenia – procedura jest przerywana, gdy liczba iteracji przekroczy z góry ustaloną liczbę k_{max} ⁶⁸.

Złe uwarunkowanie problemu jest również przyczyną silnej zależności rozwiązania końcowego od apriorycznego rozwiązania początkowego $\mathbf{f}^{(0)}$ ^{35, 36}. Rozwiązanie ostateczne często ma przebieg bardzo zbliżony do przyjętego rozwiązania wejściowego $\mathbf{f}^{(0)}$. Od rozwiązania $\mathbf{f}^{(0)}$ zależy też szybkość zbieżności algorytmu Twomeya. Rozwiązanie wejściowe $\mathbf{f}^{(0)}$ stanowi więc formę wiedzy apriorycznej umożliwiającej minimalizację efektów słabego uwarunkowania zagadnienia odwrotnego (4.17)³⁶.

Najważniejszym skutkiem złego uwarunkowania problemu są jednak tzw. artefakty w rozwiązaniu. Są to zaburzenia zwykle o charakterze gwałtownych wielkoczęstotliwościowych oscylacji nie występujące w prawdziwym rozwiązaniu $\mathbf{f}^{(0)}$ ^{35, 36, 68}. Stwierdzono, że przeprowadzenie zbyt dużej liczby iteracyjnych poprawek rozwiązania nie wpływa już praktycznie na poprawę zgodności rozwiązania



z danymi pomiarowymi, natomiast znacząco wzmacnia oscylacje w rozwiązaniu⁶⁸. W związku z tym warunek zatrzymania algorytmu powinien zapewniać kompromis pomiędzy zgodnością rozwiązania z danymi pomiarowymi a jego gładkością⁶⁸. Warunek zakończenia procedury stanowi więc drugą – oprócz rozwiązania wejściowego $\mathbf{f}^{(0)}$ – formę informacji apriorycznej⁶⁸.

4.5.2 Metoda Twomeya-Markowskiego

Środki, którymi posługuje się omawiana w poprzednim punkcie procedura Twomeya w celu uwzględnienia informacji apriorycznej o poszukiwanym rozwiązaniu, okazują się niewystarczające, by zapobiec skutkom słabego uwarunkowania zagadnienia odwrotnego. W rezultacie słabe uwarunkowanie problemu (4.17) prowadzi do znacznego spowolnienia lub zaniku zbieżności algorytmu, a uzyskiwane rozwiązania zakłócone są artefaktami w postaci silnych oscylacji wielkoczęstotliwościowych. W związku z tym opracowano wiele modyfikacji metody Twomeya^{35, 36, 69, 68}.

Udoskonalenie dokonane w ramach algorytmu Twomeya-Markowskiego polega na wprowadzeniu do metody Twomeya procedury wygładzania rozwiązań $\mathbf{f}^{(k)}$, co stanowi jawne uwzględnienie apriorycznego warunku gładkości rozwiązania⁶⁸.

W technice Twomeya-Markowskiego aprioryczne rozwiązanie początkowe $\mathbf{f}^{(0)}$ przekazywane jest na początku na wejście zwykłego algorytmu Twomeya w celu uzyskania rozwiązania, które trafia następnie na wejście pętli zwanej pętlą wygładzania i obliczeń Twomeya⁶⁸. W pętli tej przeprowadzane jest iteracyjne udoskonalanie rozwiązania poprzez⁶⁸:

- iteracyjną procedurę wygładzania bieżącego rozwiązania $\mathbf{f}^{(k)}$,
- realizację zwykłego algorytmu Twomeya, dla którego rozwiązanie wejściowe stanowi wygładzone rozwiązanie otrzymane w poprzednim kroku.

Wymienione dwa działania składają się na pojedynczy przebieg pętli wygładzania i obliczeń Twomeya.

Celem stosowania algorytmu Twomeya w ramach procedury Twomeya-Markowskiego jest poprawa zgodności rozwiązania z danymi pomiarowymi. Odbywa się ona kosztem zmniejszenia gładkości rozwiązania, czyli zwiększenia jego odstępstwa od założonego *a priori* charakteru⁶⁸. Gładkość rozwiązania przywracana jest poprzez iteracyjną procedurę wygładzania rozwiązania. Wygładzanie prowadzi jednak do pogorszenia zgodności rozwiązania z danymi pomiarowymi, co ponownie wymaga użycia algorytmu Twomeya. Iteracyjne stosowanie naprzemiennie wygładzania oraz algorytmu Twomeya ma więc na celu uzyskanie rozwiązania o zadowalającej zgodności z danymi pomiarowymi oraz jednocześnie możliwie jak najbardziej gładkiego, czyli zgodnego z założoną apriorycznie charakterystyką⁶⁸. Osiągnięcie kompromisu pomiędzy tymi dwiema właściwościami odbywa się poprzez odpowiedni dobór parametrów działania procedury wygładzania i algorytmu Twomeya⁶⁸.

Procedura wygładzania polega na iteracyjnym wykonywaniu operacji opisaney następującym wzorem⁶⁸:

$$f_j := \begin{cases} \frac{3}{4}f_1 + \frac{1}{4}f_2 & \text{dla } j = 1, \\ \frac{1}{4}f_{j-1} + \frac{1}{2}f_j + \frac{1}{4}f_{j+1} & \text{dla } j = 2, \dots, q-1, \\ \frac{1}{4}f_{q-1} + \frac{3}{4}f_q & \text{dla } j = q, \end{cases} \quad 4.112$$

gdzie $:=$ to operator przypisania, czyli nadania nowej wartości. Operacja (4.112) polega na wyznaczaniu średniej ruchomej dla wektora $\mathbf{f}$.

Jako że każdy kolejny przebieg procedury wygładzania powoduje pogarszanie zgodności rozwiązania z danymi pomiarowymi, iteracyjne wygładzanie rozwiązania przerywane jest w momencie, gdy średnie różnice pomiędzy rzeczywistymi danymi pomiarowymi $\tilde{g}_i$ oraz odpowiadającymi im teoretycznymi wartościami g_i obliczonymi dla bieżącego rozwiązania $\mathbf{f}$ w oparciu o wzór (4.107) odniesione do odchyłeń standardowych σ_i będą większe od założonego poziomu. W związku z tym za warunek przerwania iteracyjnej procedury wygładzania przyjęto⁶⁸:

$$\hat{\chi}^2 > \hat{\chi}_{limit}^2, \quad 4.113$$



gdzie $\hat{\chi}_{limit}^2$ to założona *a priori* wartość graniczna. Często przyjmuje się $\hat{\chi}_{limit}^2 = 1$ ⁶⁸.

Aby zapobiec możliwości wpadnięcia procedury wygładzania w nieskończoną pętlę, dodatkowo wprowadza się awaryjny warunek zatrzymania tej procedury. Jest ona przerywana po wykonaniu założonej liczby s_{max} przebiegów⁶⁸.

Iteracyjne udoskonalanie rozwiązania w pętli wygładzania i obliczeń Twomeya powoduje, że w kolejnych przebiegach pętli charakteryzuje się ono coraz większą gładkością przy zachowanej zgodności z rzeczywistymi danymi pomiarowymi⁶⁸. Algorytm Twomeya-Markowskiego wykazuje więc zbieżność do rozwiązania zagadnienia odwrotnego (4.17), które jest najbardziej gładkie w znaczeniu przyjętej miary.

Za miarę braku gładkości rozwiązania $\mathbf{f}$ można przyjąć średnią wartość bezwzględną różnicy drugiego rzędu wektora $\mathbf{f}$ ⁶⁸:

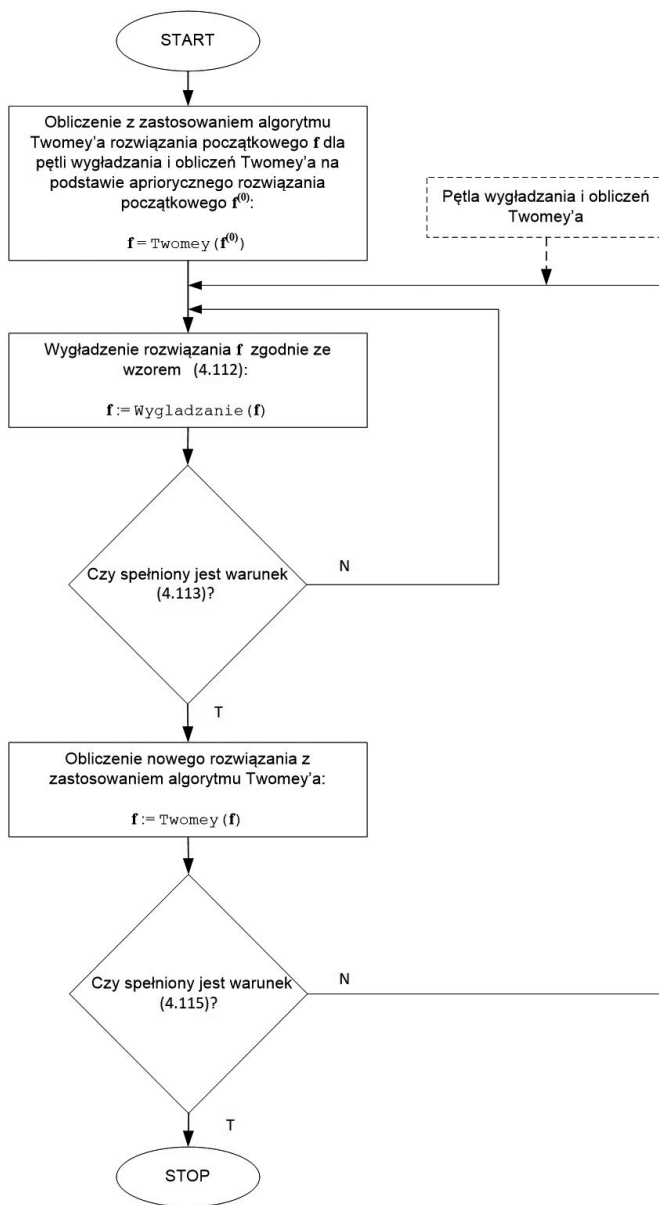
$$R = \frac{1}{q-2} \sum_{j=2}^{q-1} |f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}|. \quad 4.114$$

Po dostatecznie dużej liczbie przebiegów pętli wygładzania i obliczeń Twomeya wartość R ulega już jedynie bardzo nieznacznemu zmniejszaniu w kolejnych przebiegach, a niekiedy może pozostawać stała lub nawet rosnać. W związku z tym, za warunek przerywania pętli wygładzania i obliczeń Twomeya przyjmuje się najczęściej osiągnięcie momentu, gdy⁶⁸:

$$\frac{R^{(k)}}{R^{(k-2)}} > \mathcal{G}, \quad 4.115$$

gdzie $R^{(k)}$ – wartość R po k -tej iteracji, $\mathcal{G}$ – wartość graniczna ustalona *a priori* na podstawie wiedzy o rozwiązaniu. Zwykle przyjmuje się $\mathcal{G} = 0,95$ lub $\mathcal{G} = 0,975$.

Dla pętli wygładzania i obliczeń Twomeya wprowadza się dodatkowy awaryjny warunek zatrzymania. Pętla jest przerywana po wykonaniu założonej liczby k_{max} przebiegów⁶⁸. Przebieg działań w algorytmie Twomeya-Markowskiego prezentuje Rys. 4.2.



Rys. 4.2. Przebieg działań w algorytmie Twomeya-Markowskiego

Dzięki zastosowaniu iteracyjnej procedury wygładzania algorytm Twomeya-Markowskiego wykazuje znacznie większą odporność na skutki słabego uwarunkowania zagadnienia odwrotnego niż algorytm Twomeya. Przejawia się to:

- znacznie szybszą zbieżnością procedury Twomeya-Markowskiego⁶⁸,
- mniejszym wpływem apriorycznie przyjętego rozwiązania początkowego na ostateczne rozwiązanie⁶⁸,
- znacznie mniejszym nasileniem występowania artefaktów w rozwiązaniu w postaci wielkoczęstotliwościowych oscylacji^{69, 68} w porównaniu z klasyczną procedurą Twomeya.

Poprawę odporności na efekty słabego uwarunkowania zagadnienia odwrotnego zawdzięcza się temu, że iteracyjna procedura wygładzania wprowadza do algorytmu aprioryczny warunek gładkości rozwiązania.

4.6 BAYESOWSKA METODA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA ODWROTNEGO W POSTACI DYSKRETNEJ WYKORZYSTUJĄCA PROCEDURĘ MONTE-CARLO

Wszystkie omawiane dotąd metody inwersyjne usiłowały rozwiązać zagadnienie odwrotne w dyskretniej postaci (4.17) w sposób bezpośredni, czyli przez poszukiwanie odpowiedniego operatora odwrotnego lub jego przybliżenia. Zupełnie inne podejście do rozwiązywania problemu odwrotnego prezentują metody bayesowskie^{36, 2}. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego polega na analizie statystycznej powtarzanych wielokrotnie rozwiązań zagadnienia wprost, czyli zadania wyznaczenia wyjścia modelu (4.17) dla danego wektora $\mathbf{f}$. Analiza ta przeprowadzana jest w oparciu o tzw. statystykę bayesowską^{36, 2}.

W podejściu bayesowskim dokonuje się jawnego założenia probabilistycznego *a priori* na temat szukanego wektora $\mathbf{f}$. Założenie to ma postać łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa *a priori* wektora $\mathbf{f}$ – $p_0(\mathbf{f})$ ^{36, 2}. Rzeczywiste dane pomiarowe $\tilde{\mathbf{g}}$ służą do skorygowania apriorycznej wiedzy o szukanym wektorze $\mathbf{f}$ poprzez modyfikację łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa wektora

$\mathbf{f}$ z zastosowaniem twierdzenia Bayesa^{36, 2}. Zgodnie z tym twierdzeniem łączna warunkowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa wektora $\mathbf{f}$ przy założeniu, że w rezultacie pomiaru zarejestrowane zostały dane pomiarowe $\tilde{\mathbf{g}}$, zwana łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa *a posteriori* wektora $\mathbf{f}$, dana jest wzorem^{36, 2}:

$$p(\mathbf{f}|\tilde{\mathbf{g}}) = \frac{p_0(\mathbf{f})p_L(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{f})}{p(\tilde{\mathbf{g}})}, \quad 4.116$$

gdzie: $p(\tilde{\mathbf{g}})$ to łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa wektora danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$ (funkcja gęstości prawdopodobieństwa tego, że w toku pomiarów uzyskane zostaną wyniki $\tilde{\mathbf{g}}$), $p_L(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{f})$ – łączna warunkowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa wektora danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$, przy założeniu, że prawdziwe rozwiązanie problemu odwrotnego stanowi wektor $\mathbf{f}$ (funkcja gęstości prawdopodobieństwa tego, że w toku pomiarów uzyskane zostaną wyniki $\tilde{\mathbf{g}}$, przy założeniu, że prawdziwe rozwiązanie problemu odwrotnego stanowi wektor $\mathbf{f}$). Funkcja $p_L(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{f})$ zwana jest również funkcją wiarygodności danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$. Funkcja $p(\mathbf{f}|\tilde{\mathbf{g}})$ stanowi gęstość prawdopodobieństwa tego, że rozwiązaniem zagadnienia odwrotnego jest wektor $\mathbf{f}$ przy założeniu, że w rezultacie pomiarów uzyskano wyniki $\tilde{\mathbf{g}}$ ⁴⁸. Jest to więc probabilistyczna wiedza o rozwiązaniu problemu $\mathbf{f}$ wynikająca z wiedzy *a priori* o tym rozwiązaniu skorygowanej w oparciu o wyniki pomiarów $\tilde{\mathbf{g}}$ ^{36, 2}.

W rzeczywistości podejście bayesowskie do rozwiązywania problemu odwrotnego realizowane jest przy wykorzystaniu techniki Monte Carlo³⁶. Metoda polega na wylosowaniu m wektorów $\mathbf{f}$ oznaczonych $\mathbf{f}_k$, $k = 1, \dots, m$ z wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa opisanego łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa *a priori* $p_0(\mathbf{f})$. Dla każdego z wylosowanych wektorów $\mathbf{f}_k$, $k = 1, \dots, m$, obliczane jest wyjście modelu (4.17), czyli odpowiadający wektorowi $\mathbf{f}_k$ wektor teoretycznych danych pomiarowych $\mathbf{g}_k$. Obliczenia te często określane są jako symulacja pomiarów. Każdemu wektorowi $\mathbf{f}_k$ oraz odpowiadającemu mu wektorowi $\mathbf{g}_k$ przypisać można prawdopodobieństwo masowe³⁶:



$$P(\mathbf{f}_k) = P(\mathbf{g}_k) = \frac{1}{m}, \quad k = 1, \dots, m. \quad 4.117$$

Ze wzoru (4.117) wynika, że:

$$\sum_{k=1}^m P(\mathbf{f}_k) = \sum_{k=1}^m P(\mathbf{g}_k) = 1. \quad 4.118$$

Ponadto zdarzenia polegające na uzyskiwaniu w danym przebiegu losowania określonego wektora $\mathbf{f}_k$ i odpowiadającego mu wektora $\mathbf{g}_k$ są zdarzeniami wzajemnie wykluczającymi się.

Dla każdego wektora $\mathbf{g}_k$, $k = 1, \dots, m$, obliczana jest łączna warunkowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa uzyskania w rezultacie rzeczywistych pomiarów wektora danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$ przy założeniu, że w efekcie symulacji pomiaru otrzymany został wektor $\mathbf{g}_k - p(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_k)^{36}$. Niech wektor błędów pomiarowych:

$$\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g} \quad 4.119$$

posiada p -wymiarowy rozkład normalny:

$$p_e(\mathbf{e}) = \left(\frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi}} \right)^p \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_e^2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} \right), \quad 4.120$$

odpowiadający założeniu, że elementy wektora $\mathbf{e}$ stanowią wzajemnie nieskorelowane zmienne losowe o rozkładzie normalnym z zerową wartością oczekiwaną i jednakowym odchyleniem standardowym σ_e^{36} . Wówczas³⁶:

$$p(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_k) = p_e(\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_k) = \left(\frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi}} \right)^p \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_e^2} (\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_k)^T (\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_k) \right). \quad 4.121$$

Łączna warunkowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa wektora symulowanych danych pomiarowych $\mathbf{g}_k$ przy założeniu, że rzeczywiste dane pomiarowe stanowi wektor $\tilde{\mathbf{g}}$, czyli łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa *a posteriori* wektora $\mathbf{g}_k$, określona jest wzorem Bayesa³⁶:

$$p(\mathbf{g}_k|\tilde{\mathbf{g}}) = \frac{P(\mathbf{g}_k)p(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_k)}{P(\tilde{\mathbf{g}})}, \quad 4.122$$

gdzie $P(\tilde{\mathbf{g}})$ to prawdopodobieństwo uzyskania w wyniku rzeczywistych pomiarów wektora danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$. Ponieważ prawdopodobieństwa $P(\mathbf{g}_k)$ spełniają związek (4.118) oraz zdarzenia

polegające na uzyskiwaniu w danym przebiegu losowania określonego wektora $\mathbf{g}_k$ są zdarzeniami wzajemnie wykluczającymi się, prawdopodobieństwo $P(\tilde{\mathbf{g}})$ można obliczyć ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite³⁶:

$$P(\tilde{\mathbf{g}}) = \sum_{k=1}^m p(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_k)P(\mathbf{g}_k). \quad 4.123$$

Po podstawieniu wyrażenia (4.123) do wzoru (4.122) otrzymuje się ostatecznie³⁶:

$$p(\mathbf{g}_k|\tilde{\mathbf{g}}) = \frac{P(\mathbf{g}_k)p(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_k)}{\sum_{k=1}^m p(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_k)P(\mathbf{g}_k)}. \quad 4.124$$

Uwzględniając związek (4.117), wzór (4.124) można uprościć do postaci³⁶:

$$p(\mathbf{g}_k|\tilde{\mathbf{g}}) = \frac{p(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_k)}{\sum_{k=1}^m p(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_k)}. \quad 4.125$$

Pamiętając, że wektor $\mathbf{g}_k$ odpowiada wektorowi $\mathbf{f}_k$, można zapisać³⁶:

$$p(\mathbf{f}_k|\tilde{\mathbf{g}}) = p(\mathbf{g}_k|\tilde{\mathbf{g}}). \quad 4.126$$

Ostatecznie więc³⁶:

$$p(\mathbf{f}_k|\tilde{\mathbf{g}}) = \frac{p(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_k)}{\sum_{k=1}^m p(\tilde{\mathbf{g}}|\mathbf{g}_k)}. \quad 4.127$$

Funkcja $p(\mathbf{f}_k|\tilde{\mathbf{g}})$ stanowi łączną warunkową funkcję gęstości prawdopodobieństwa tego, że na wejście modelu przekazany został wektor $\mathbf{f}_k$, przy założeniu, że w rezultacie rzeczywistych pomiarów uzyskany został wektor danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$, czyli łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa *a posteriori* wektora $\mathbf{f}_k$. Funkcja $p(\mathbf{f}_k|\tilde{\mathbf{g}})$ niesie probabilistyczną wiedzę o rozwiązaniu problemu $\mathbf{f}$ wynikającą z wiedzy *a priori* o tym rozwiązaniu skorygowanej w oparciu o wyniki pomiarów $\tilde{\mathbf{g}}$ ³⁶. Liczba symulacji m przeprowadzanych w praktyce jest bardzo wielka.

Znajomość funkcji $p(\mathbf{f}_k|\tilde{\mathbf{g}})$ umożliwia wyznaczenie różnych estymatorów szukanego wektora $\mathbf{f}$. Najczęściej stosowane są³⁶:

- estymator największego prawdopodobieństwa *a posteriori*,
- estymator bayesowski o minimalnej wariancji.



Estymator największego prawdopodobieństwa *a posteriori* $\hat{\mathbf{f}}_{MAP}$ zdefiniowany jest jako moda łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa *a posteriori* $p(\mathbf{f}_k | \tilde{\mathbf{g}})$, czyli³⁶:

$$\hat{\mathbf{f}}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{f}_k} \{p(\mathbf{f}_k | \tilde{\mathbf{g}})\}. \quad 4.128$$

Estymator bayesowski o minimalnej wariancji $\hat{\mathbf{f}}_{MVBE}$ zdefiniowany jest jako warunkowa wartość oczekiwana wektora $\mathbf{f}$ przy założeniu, że w wyniku pomiarów uzyskany został wektor danych pomiarowych $\tilde{\mathbf{g}}$ ³⁶:

$$\hat{\mathbf{f}}_{MVBE} = E(\mathbf{f} | \tilde{\mathbf{g}}) = \sum_{k=1}^m \mathbf{f}_k p(\mathbf{f}_k | \tilde{\mathbf{g}}). \quad 4.129$$

Podane estymatory traktuje się jako rozwiązania problemu odwrotnego.

PODSUMOWANIE

*Bądźmy ludźmi, choćby tak długo, póki nauka
nie odkryje, że jesteśmy czym innym.*

STANISŁAW JERZY LEC

Niejednokrotnie w dyskusjach ze swoimi uczniami podejmowałem trud odpowiedzi na pytanie, czy uprawianie nauki jest przeżywaniem wielkiej przygody, czy raczej jednym ze sposobów na życie.

Mam przed oczyma posagową twarz mojego lwowsko-wrocławskiego Mistrza, Profesora Andrzeja Jellonka, żywą do dziś w pamięci jego dostojność retoryczną i naukową. Pamiętam przesłanie Ludwika Hirszfelda, któremu hołdował: „Jeśli chcesz zapalać innych, sam musisz płonąć”. Dziś, w retrospekcji własnych doświadczeń i losów, wiem, że nauka musi stać się sposobem na życie, aby mogła dać prawdziwie piękne i pasjonujące owoce. Życie naukowe, jakkolwiek niepoddające się formalnym definicjom, będące źródłem nieustannych „natchnień”, wewnętrznego bogactwa, wzruszeń, filozoficznych refleksji i frustracji, intymnym kontaktem z przyrodą, utylitarną studnią bez dna, chęcią i potrzebą jednocześnie dzielenia się własną pracą i doświadczeniem, jest czymś, do czego warto dążyć. Dążyć uczciwie, w duchu łacińskiego *Veritas temporis filia est**.

Żywię głęboką nadzieję, że przedstawione w niniejszym opracowaniu wątki naukowe staną się podstawą dalszych, nowych działań naukowych w zakresie nieustannie rozwijającej się metrologii układów dyspersyjnych oraz inspiracją dla nowych pokoleń naukowców oddanych swym naukowym pasjom.

* Prawda jest córką czasu (z czasem wszystko wychodzi na jaw).



LITERATURA

- [1] **MROCZKA, J.** *Metrologiczne Problemy Wykorzystywania Światła Rozproszanego do Badań Rozkładu Wielkości Cząstek w Roztworach Dyspersyjnych*, Warszawa (1990).
- [2] **MROCZKA, J.** Method of Moments in Light Scattering Data Inversion in the Particle Size Distribution. *Optics Communications*, 99, 147–151 (1993).
- [3] **MROCZKA, J. & SZCZUCZYŃSKI, D.** Improved technique of retrieving particle size distribution from angular scattering measurements. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 129, 48–59 (2013).
- [4] **MROCZKA, J.** Turbidimetric methods in particle sizing. *Digest of the 12th Triennial World Congress of the International Measurement Confederation (IMEKO)*. Beijing, China: (1991).
- [5] **MROCZKA, J.** Integral transform technique in particle sizing. *Digest of the 12th Triennial World Congress of the International Measurement Confederation (IMEKO)*. Beijing, China: (1991).
- [6] **MROCZKA, J. & SZCZUCZYŃSKI, D.** Inverse problems formulated in terms of first-kind Fredholm integral equations in indirect measurements. *Metrology and Measurement Systems*, 16, 333–357 (2009).
- [7] **MROCZKA, J. & SZCZUCZYŃSKI, D.** Improved regularized solution of the inverse problem in turbidimetric measurements. *Applied Optics*, 49, 4591–4603 (2010).
- [8] **MROCZKA, J. & SZCZUCZYŃSKI, D.** Simulation research on improved regularized solution of inverse problem in spectral extinction measurements. *Applied Optics*, 51, 1715–1723 (2012).
- [9] ONOFRI, F., KRZYSIEK, M., BARBOSA, S., MESSENGER, V., REN, K.F. & **MROCZKA, J.** Near-critical-angle scattering for the characterization of clouds of bubbles: particular effects. *Applied Optics*, 50, 5759–5769 (2011).
- [10] ONOFRI, F., KRZYSIEK, M. & **MROCZKA, J.** Critical angle refractometry and sizing of bubble clouds. *Optics Letters*, 32, 2070–2072 (2007).

- [11] ONOFRI, F., KRZYSIEK, M., **MROCZKA, J.**, REN, K. F., RADEV, S. & BONNET, J.-P. Optical characterization of bubbly flows with a near-critical-angle scattering technique. *Experiments in Fluids*, 47, 721–732 (2009).
- [12] CZERWIŃSKI, M., **MROCZKA, J.**, GIRASOLE, T., GOUESBET, G. & GRÉHAN, G. Light-transmittance predictions under multiple-light-scattering conditions. Pt. 1. Direct problem: hybrid-method approximation. *Applied Optics*, 40, 1514–1524 (2001).
- [13] CZERWIŃSKI, M., **MROCZKA, J.**, GIRASOLE, T., GOUESBET, G. & GRÉHAN, G. Light-transmittance predictions under multiple-light-scattering conditions. Pt. 2. Inverse problem: particle size determination. *Applied Optics*, 40, 1525–1531 (2001).
- [14] GUSZKOWSKI, T. & **MROCZKA, J.** Metoda inwersyjna wykorzystująca sztuczną sieć neuronową w turbidymetrii spektralnej. *Metrologia wspomagana komputerowo. MWK '2003. VI Szkoła – konferencja*. Waplewo: Instytut Podstaw Elektroniki Wydział Elektroniki WAT (2003).
- [15] ONOFRI, F., BARBOSA, S., WOŹNIAK, M., **MROCZKA, J.**, VREL, D. & GRISOLIA, C. In Situ Characterization of Dust Mobilized by Laser Cleaning Methods and Loss of Vacuum Accidents. *Fusion Science and Technology*, 62, 39–45 (2012).
- [16] GIRASOLE, T., BULTYNCK, H., GOUESBET, G., GRÉHAN, G., LE MEUR, F., LE TOULOUZAN, J. N., **MROCZKA, J.**, REN, K. F., ROZE, C. & WYSOCZAŃSKI, D. Cylindrical fibre orientation analysis by light scattering: Part 1: Numerical aspects. *Particle & Particle Systems Characterization*, 14, 163–174 (1997).
- [17] GIRASOLE, T., GOUESBET, G., GRÉHAN, G., LE TOULOUZAN, J. N., **MROCZKA, J.**, REN, K. F. & WYSOCZAŃSKI, D. Cylindrical fibre orientation analysis by light scattering: Part 2: Experimental aspects. *Particle & Particle Systems Characterization*, 14, 211–218 (1997).
- [18] GIRASOLE, T., LE TOULOUZAN, J. N., **MROCZKA, J.** & WYSOCZAŃSKI, D. Fiber orientation and concentration analysis by light scattering: experimental setup and diagnosis. *Review of Scientific Instruments*, 68, 2805–2811 (1997).
- [19] **MROCZKA, J.**, WYSOCZAŃSKI, D. & ONOFRI, F. Optical parameters and scattering properties of red blood cells. *Optica Applicata*, 32, 691–700 (2002).

- [20] SKORUPSKI, K. & **MROCZKA, J.** Effect of the necking phenomenon on the optical properties of soot particles. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 141, 40–48 (2014).
- [21] SKORUPSKI, K., **MROCZKA, J.**, RIEFLER, N., OLTMANN, H., WILL, S. & WRIEDT, T. Impact of morphological parameters onto simulated light scattering patterns. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 119, 53–66 (2013).
- [22] WOŹNIAK, M., ONOFRI, F., BARBOSA, S., YON, J. & **MROCZKA, J.** Comparison of methods to derive morphological parameters of multi-fractal samples of particle aggregates from TEM images. *Journal of Aerosol Science*, 47, 12–26 (2012).
- [23] SKORUPSKI, K., HELLMERS, J., FENG, W., **MROCZKA, J.**, WRIEDT, T. & MÄDLER, L. Influence of sintering necks on the spectral behaviour of ITO clusters using the Discrete Dipole Approximation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 159, 11–18 (2015).
- [24] WOJTASZEK, T. & **MROCZKA, J.** Light scattering simulations of spheroids using three beams phase Doppler system. *XVIII IMEKO World Congress Metrology for a Sustainable Development*. Rio de Janeiro, Brazil: (2006).
- [25] ŚWIRNIAK, G., GŁOMB, G. & **MROCZKA, J.** Inverse analysis of the rainbow for the case of low-coherent incident light to determine the diameter of a glass fiber. *Applied Optics*, 53, 4239–4247 (2014).
- [26] ŚWIRNIAK, G., GŁOMB, G. & **MROCZKA, J.** Inverse analysis of light scattered at a small angle for characterization of a transparent dielectric fiber. *Applied Optics*, 53, 7103–7111 (2014).
- [27] ŚWIRNIAK, G. & **MROCZKA, J.** Approximate solution for optical measurements of the diameter and refractive index of a small and transparent fiber. *Journal of the Optical Society of America A*, 33, 667–676 (2016).
- [28] ŚWIRNIAK, G. & **MROCZKA, J.** Numerical analysis of primary rainbows from a homogeneous cylinder and an optical fiber for incident low-coherent light. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 195, 176–188 (2017).
- [29] ŚWIRNIAK, G. & **MROCZKA, J.** Non-invasive measurements of transparent fibres. *Metrology and Measurement Systems*, 27, 19–31 (2020).

- [30] **MROCZKA, J.** Temperature stabilisation of light-emitting diode radiation. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, 21, 306–309 (1988).
- [31] **MROCZKA, J. & PAROL, M.** Methods of temperature stabilization of light-emitting diode radiation. *Review of Scientific Instruments*, 65, 803–806 (1994).
- [32] **SYDENHAM, P. H. (ed.)** *Handbook of Measurement Science. Volume 1: Theoretical Fundamentals*, Chichester: John Wiley & Sons (1982).
- [33] **LINGJEARDE, O.C. & CHRISTOPHERSEN, N.** *Regularization Principles: Solving Ill-Posed Inverse Problems*. Lecture notes in INVPAR, Departament of Informatics, University of Oslo (1998).
- [34] **HANSEN, P. C.** Regularization Tools: A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems. *Numerical Algorithms*, 6, 1–35 (1994).
- [35] **CRUMP, J. G. & SEINFELD, J. H.** A New Algorithm for Inversion of Aerosol Size Distribution Data. *Aerosol Science and Technology*, 1, 15–34 (1981).
- [36] **KANDLIKAR, M. & RAMACHANDRAN, G.** Inverse Methods for Analysing Aerosol Spectrometer Measurements: A Critical Review. *Journal of Aerosol Science*, 30, 413–437 (1999).
- [37] **BOHREN, C. F. & HUFFMAN, D. R.** *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, New York, John Wiley & Sons (1983).
- [38] **JONES, A. R.** Light scattering for particle characterization. *Progress in Energy and Combustion Science*, 25, 1–53 (1999).
- [39] **XU, R.** *Particle Characterization: Light Scattering Methods*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers (2000).
- [40] **VIERA, G. & BOX, M. A.** Information content analysis of aerosol remote-sensing experiments using an analytic eigenfunction theory: anomalous diffraction approximation. *Applied Optics*, 24, 4525–4533 (1985).
- [41] **KAHNERT, F. M.** Numerical methods in electromagnetic scattering theory. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 79–80, 775–824 (2003).
- [42] **ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A.** *Handbook of Mathematical Functions*, Washington DC, National Bureau of Standards (1970).
- [43] **ADEN, A. L.** Electromagnetic Scattering from Spheres with Sizes Comparable to the Wavelength. *Journal of Applied Physics*, 22, 601–605 (1951).



- [44] HADAMARD, J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, 13, 49–52 (1902).
- [45] LESNIC, D., ELLIOT, L. & INGHAM, D. B. A numerical analysis of the data inversion of particle sizing instruments. *Journal of Aerosol Science*, 27, 1063–1082 (1996).
- [46] BRANDT, S. *Analiza danych*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN (1998).
- [47] BJÖRCK, A. & DAHLQUIST, G. *Metody numeryczne*, Warszawa, PWN (1983).
- [48] HANSEN, P. C. Computation of the singular value expansion. *Computing*, 40, 185–199 (1988).
- [49] VASIN, V. V. & AGEEV, A. L. *Ill-Posed Problems with a Priori Information*, Utrecht, De Gruyter (1995).
- [50] TIKHONOV, A. N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math. Dokl.*, 4, 1035–1038 (1963).
- [51] TIKHONOV, A. N. & ARSENIN, V. Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*, Washington D.C., Winston & Sons (1977).
- [52] TIKHONOV, A. N. & GONCHARSKY, A. V. *Ill-Posed Problems in Natural Sciences*, Moscow, MIR Publishers (1987).
- [53] HANSEN, P. C. Regularization, GSVD and truncated GSVD. *BIT Numerical Mathematics*, 29, 491–504 (1989).
- [54] HANSEN, P. C. Relations between SVD and GSVD of Discrete regularization problems in standard and general form. *Linear Algebra and its Applications*, 141, 165–176 (1990).
- [55] HANSEN, P. C. The truncated SVD as a method for regularization. *BIT Numerical Mathematics*, 27, 534–553 (1987).
- [56] HANSEN, P. C. The Modified Truncated SVD Method for Regularization in General Form. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13, 1142–1150 (1991).
- [57] PHILLIPS, D. L. A Technique for the Numerical Solution of Certain Integral Equations of the First Kind. *Journal of the ACM*, 9, 84–96 (1962).
- [58] MARTOS, B. *Programowanie nieliniowe. Teoria i metody*, Warszawa, PWN (1983).
- [59] ZANGWILL, W. I. *Programowanie nieliniowe*, Warszawa, PWN (1974).

- [60] HANSEN, P. C. Truncated Singular Value Decomposition Solutions to Discrete Ill-Posed Problems with Ill-Determined Numerical Rank. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11, 503–518 (1990).
- [61] VOGEL, C. R. Optimal Choice of a Truncation Level for the Truncated SVD Solution of Linear First Kind Integral Equations When Data are Noisy. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23, 109–117 (1986).
- [62] HANSEN, P. C. & O’LEARY, P. The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14, 1487–1503 (1993).
- [63] GOLUB, G. H., HEATH, M. & WAHBA, G. Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter. *Technometrics*, 21, 215–223 (1979).
- [64] MOROZOV, V. A. *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*, New York, Springer (1984).
- [65] CHAHINE, M. T. Determination of the Temperature Profile in an Atmosphere from its Outgoing Radiance. *Journal of the Optical Society of America*, 58, 1634–1637 (1968).
- [66] TWOMEY, S. Comparison of constrained linear inversion and an iterative nonlinear algorithm applied to the indirect estimation of particle size distributions. *Journal of Computational Physics*, 18, 188–200 (1975).
- [67] WINKLMAYR, W., WANG, H.-C. & JOHN, W. Adaptation of the Twomey Algorithm to the Inversion of Cascade Impactor Data. *Aerosol Science and Technology*, 13, 322–331 (1990).
- [68] SMITH, C. R. & GRANDY, W. (eds.) *Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Inverse Problems*, Dordrecht: Springer Netherlands (1985).
- [69] MARKOWSKI, G. R. Improving Twomey’s Algorithm for Inversion of Aerosol Measurement Data. *Aerosol Science and Technology*, 7, 127–141 (1986).

